3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 10. 4. 2019.

Úloha 1. Konverguje řada

$$1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \ldots ?$$

Úloha 2. Najděte všechna prvočísla p, pro která má soustava

$$\begin{aligned} p + 1 &= 2x^2 \\ p^2 + 1 &= 2y^2 \end{aligned}$$

řešení v celých číslech.

Úloha 3. Buď S konečná množina a $S_1, \ldots, S_{2019}$ její podmnožiny, z nichž každá obsahuje více než polovinu prvků S. Ukažte, že existuje nejvýše desetiprvková množina $T \subset S$, která má neprázdný průnik s každou z množin S_i.

Úloha 4. V prostoru jsou dány body A, B, C, D. Nechť $|AX| + |BX| + |CX| + |DX|$ nabývá minima v bodě $X = X_0$ různém od A, B, C, D. Ukažte, že $|\sphericalangle AX_0B| = |\sphericalangle CX_0D|$.

Úloha 5. Nechť m, n jsou přirozená čísla a $n - m$ je sudé a nezáporné. Dokažte, že

$$\int_0^\infty x^{-m} \sin^n x dx$$

je racionální násobek π.

Úloha 6. Pro přirozené n označme M_n čtvercovou matici řádu n, jejíž (i, j)-tý prvek je 1, pokud $j|i + 1$, a 0 jinak. Ukažte, že M_n je regulární, právě když je $n + 1$ součinem navzájem různých prvočísel.