

3. soutěžní série

20. 3. 2019

Úloha 1. Má rovnice

$$(n!)^2 + ((n+1)!)^2 + ((n+2)!)^2 = m^2$$

řešení v přirozených číslech? (5 bodů)

Úloha 2. Konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n^n}}}$$
 (10 bodů)

Úloha 3. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, které splňují

$$f(z) + zf(1-z) = 1 + z$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$. (10 bodů)

Úloha 4. Ve městě s pravoúhlou sítí severojižních a východozápadních ulic se potřebujeme dostat z jedné křižovatky na křižovatku o n ulic na sever a n ulic na východ. Zvolíme náhodně jednu z $\binom{2n}{n}$ nejkratších cest (všechny mají stejnou pravděpodobnost). Jaká je střední hodnota počtu změn směru na naší cestě (konec ani začátek cesty se jako změna směru nepočítají)? (15 bodů)