5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 22. 5. 2019.

Úloha 1. Ukažte, že pro každý polynom s celočíselnými koeficienty a každé přirozené číslo k existuje k po sobě jdoucích přirozených čísel n, $\ldots$, $n+k-1$, pro něž je $p(n+i)$, $i = 0, \ldots, k-1$ číslo složené.

Úloha 2. Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných čísel a $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1})$ nechť je kladné reálné číslo. Jakých hodnot může nabývat

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n ?$$

Úloha 3. V rovině se nachází n kuliček. V jednom kroku smíme dvě z nich přemístit do středu jejich úsečky. Rozmístění kuliček nazveme *kolizní*, pokud je možné pomocí konečného počtu kroků dostat všechny kuličky do jednoho bodu. Najděte všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která je každé rozmístění n kuliček kolizní.

Úloha 4. Je možné pokrýt a) rovinu; b) prostor libovolným počtem libovolných disjunktních kružic s kladným poloměrem?

Úloha 5. Určete počet přirozených čísel n splňujících

- n má 1000 číslic,
- všechny číslice n jsou liché,
- každá dvojice sousedních číslic n se liší o 2.

$\star$ **Úloha 6.** Buď $f(n)$ rovno nejvyššímu celému k takovému, že n^k dělí $n!$, a nechť $F(n) = \max_{2\le m\le n} f(m)$. Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(n)\log n}{n\log\log n} = 1.$$