6. soutěžní série – řešení

1. Ano. Lze ukázat, že nejvyšší mocnina p dělící $n!$ je p^m, kde $m = \sum_{i=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$. Pokud $n < p^2$, pak $p^p \nmid n!$. Pokud $n \geq p^2$, pak $p^{p+1} | n!$.

2. První hráč má vyhrávající strategii. Tabulku nazveme *stabilní*, pokud po přidání jednoho písmene nemůže obsahovat SOS. Políčko ve stabilní tabulce je *nebezpečné*, pokud S i O vyplněné do něj udělají tabulku nestabilní. Hráč tedy prohraje, pokud jsou všechna zbývající políčka tabulky nebezpečná, jinak si může alespoň zajistit další tah ve hře nebo remízu. Pokud je políčko nebezpečné a hráč by na něj umístil O, pak z jedné strany musí být S a druhá strana musí být volná. Pokud je políčko nebezpečné a hráč by na něj umístil S, pak na straně, kde je volné políčko, musí následovat S. Tím jsme ukázali, že nebezpečná políčka jsou právě uvnitř *nebezpečné čtveřice* S _ _ S. Speciálně jich je sudý počet. Vyhrávající strategií pro prvního hráče je: Pokud někdy dostane nestabilní tabulku, vytvoří SOS. V prvních dvou tazích vytvoří nebezpečnou čtveřici. Dále hraje tak, aby nevytvořil nestabilní tabulku. To je vždy možné, protože v každém tahu má před sebou tabulku se sudým počtem obsazených, sudým počtem nebezpečných a lichým počtem bezpečných políček. První nebezpečnou čtveřici vytvoří tak, že v prvním tahu umístí S na 4. místo a ve druhém tahu umístí S buď na 1. nebo na 7. místo.

3. Číslo b_n má nejvýše $\sqrt{b_n}$ dělitelů menších nebo rovných $\sqrt{b_n}$ a každému děliteli d většímu než $\sqrt{b_n}$ odpovídá dělitel $\frac{b_n}{d} < \sqrt{b_n}$. Víme, že b_n má alespoň n dělitelů $a_1, \dots, a_n$ a zároveň nejvýše $2\sqrt{b_n}$ dělitelů. Proto $b_n \geq \frac{n^2}{4}$. Odtud plyne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}$.

4. Průnik elipsoidu a roviny je elipsa. Dále platí, že průnik elipsoidu a dvou rovnoběžných rovin jsou podobné elipsy. Největší kružnice K s poloměrem r proto bude průnikem elipsoidu s rovinou P procházející jejím středem. Kdyby P byla kolmá na některou z poloos elipsoidu, pak by průnikem byla elipsa s různými poloosami, ne kružnice. Průnik P s rovinou $x = 0$ je tedy úsečka. Její délka je průměr K a zároveň nějaký průměr elipsy s poloosami b, c, tedy speciálně $r \geq b$. Obdobná úvaha pro rovinu $z = 0$ nám dá odhad $r \leq b$. Zbývá ukázat, že nějaká kružnice o poloměru b na elipsoidu exisuje. Uvažujme rovinu obsahující osu y. Průnikem s elipsoidem dostaneme elipsu symetrickou podle osy y, tedy b je její poloosou. Otáčením roviny kolem osy y se druhá poloosa elipsy spojitě posunuje z a do c, tedy skutečně najdeme kružnici o poloměru b.