2. domácí série – nápověda

3. úloha: Pro $n = \prod_{i=1}^{l} p_i^{k_i}$ platí $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{l}(1 + p_i + \ldots + p_i^{k_i})$. Pokud je p_i liché, pak k_i musí být sudé. Proto $n = 2^k m^2$ pro liché m. Zbývá ukázat $k = 0$. Máme $\sigma(n) = (2^{k+1} - 1)\sigma(m^2) = 2^{k+1}m^2 + 1$. Co se děje modulo dělitel $(2^{k+1} - 1)$?

4. úloha: Funkce f je dvakrát diferencovatelná, takže je možné celou rovnici $f(x)^2 - f(y)^2 = f(x+y)f(x-y)$ dvakrát zderivovat. Po několika úpravách lze dojít ke vztahu $f''(x) = cf(x)$.

6. úloha: Výsledkem je $\sqrt[4]{8}$. Označme $d = \gcd(n, \lfloor n\sqrt{2} \rfloor)$, $n = da$, $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor = db$. Platí $db < da\sqrt{2} < db + 1$. Ukažte $d < \sqrt{8}a$ a najděte posloupnost $\{n_k\}$ splňující $\frac{d_{n_k}}{a_{n_k}} \to \sqrt{8}$. Můžete narazit na Pellovu rovnici.