

2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 18. 3. 2020.

Úloha 1. Nechtě A, B, C jsou reálné $n \times n$ matice. Dokažte nerovnost

$$\operatorname{tr}(A(A^T - B^T) + B(B^T - C^T) + C(C^T - A^T)) \geq 0.$$

Úloha 2. Nechtě $f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ je spojitá funkce a uvažme čísla x_n taková, že

$$\int_0^{x_n} f(x) dx = \frac{1}{n}$$

pro každé n větší než nějaké n_0 . Ukažte, že posloupnost nx_n konverguje a určete její limitu.

Úloha 3. Bud' $\sigma(n)$ součet všech kladných dělitelů n , včetně 1 a n . Ukažte, že pokud $\sigma(n) = 2n + 1$, pak je n čtvercem lichého čísla.

Úloha 4. Najděte všechny dvakrát diferencovatelné funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $f^2(x) - f^2(y) = f(x + y)f(x - y)$.

Úloha 5. Určete nejmenší číslo k takové, aby v každém konvexním 101-úhelníku byl součet délek libovolných k úhlopříček větší nebo roven součtu délek zbývajících úhlopříček.

★ **Úloha 6.** Určete

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\gcd(n, \lfloor n\sqrt{2} \rfloor)}{\sqrt{n}}.$$