5. soutěžní série – řešení

1. Označme $x = \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$. Pak

$$x^2 = 3n + 3 + 2(\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n+2)} + \sqrt{(n+1)(n+2)}).$$

Doplněním na čtverec snadno získáme $n(n+1) < (n+\frac{1}{2})^2$, $n(n+2) < (n+1)^2$, $(n+1)(n+2) < (n+\frac{3}{2})^2$, tj.

$$x^2 < 3n + 3 + 2(n + \frac{1}{2} + n + 1 + n + \frac{3}{2}) = 9n + 9.$$

což jsme potřebovali. Z druhé strany chceme $n(n+1) > (n+p)^2$, tj. $\frac{p^2}{1-2p} < n$, což stačí vyřešit pro $n = 1$ a získáme $p < \sqrt{2}-1$, tj. $n(n+1) > (n+\sqrt{2}-1-\varepsilon)^2$. Podobně dostaneme $n(n+2) > (n+\sqrt{3}-1-\varepsilon)^2$ a $(n+1)(n+2) > (n+\sqrt{6}-1-\varepsilon)^2$ a dohromady tedy

$$x^2 > 3n + 3 + 2(3n - 3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - 3\varepsilon) > 9n - 3 + 2(1,4 + 1,7 + 2,4) = 9n + 8.$$

2. Substitucí $x_i = \frac{2n+1}{2n} - y_i$ dostáváme $\frac{x_1+\cdots+x_n}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{y_1+\cdots+y_n}{2n+1}$ a nově budeme integrovat $\sin^2 \frac{\pi(y_1+\cdots+y_n)}{2n+1}$ na $[\frac{1}{2n}, 1+\frac{1}{2n}]^n$. Sečtením s původním výrazem pro integrál I_n a využitím $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ na krychli $[0,1]^n$ dostáváme

$$\begin{aligned}2I_n = 1 + &\int_{[\frac{1}{2n},1+\frac{1}{2n}]^n \setminus [0,1]^n} \sin^2 \frac{\pi(y_1+\cdots+y_n)}{2n+1}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\ - &\int_{[0,1\setminus]^n [\frac{1}{2n},1+\frac{1}{2n}]^n} \cos^2 \frac{\pi(y_1+\cdots+y_n)}{2n+1}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.\end{aligned}$$

Oba zbytkové integrály jsou z omezených funkcí na množinách, jejichž míra jde k nule, a proto $\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}$.

(Dokončené Martinovo řešení): $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{4}e^{-2ix}$,stačí spočítat

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n} e^{\frac{2\pi i}{2n+1}\sum x_i}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n &= \left(\int_0^1 e^{\frac{2\pi i}{2n+1}x}\,\mathrm{d}x\right)^n = \left(\frac{2n+1}{2\pi i}\left(e^{\frac{2\pi i}{2n+1}} - 1\right)\right)^n\\ &= \left(1 + \frac{2\pi i}{4n+2} + O(n^{-2})\right)^n \to e^{\frac{\pi i}{2}} = i,\end{aligned}$$

druhý integrál konverguje k $-i$, odpověď je $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i + \frac{1}{4}(-i) = \frac{1}{2}$.

3. Je to 8 prvků $1, g^2, h, h^2, h^3, h^4, h^5, h^6$. Z $ghg^{-1}h = 1$ plyne $gh = h^{-1}g = h^6 g$ (*) (lze prohodit pořadí g a h, ale musíme při tom invertovat h), díky čemuž lze každý prvek G napsat ve tvaru $h^n g^m$, $n \in \{0,\ldots,6\}$, $m \in \{0,\ldots,3\}$. Zbývá si rozmyslet, co jsou jejich druhé mocniny. Použitím (*) zjistíme $(h^n g)^2 = g^2$, $(h^n g^2)^2 = h^{2n}$, $(h^n g^3)^2 = g^2$, a navíc očividně $(h^n)^2 = h^{2n}$. Tím dostáváme g^2 a 7 mocnin h. To jsou všechno navzájem různé prvky G.

4. Zaprvé, jedna barva určitě nestačí, protože například v množině sestávající z čísel 2, 4 a k tomu nějakých 2018 lichých prvočísel, pak $f(\{2,4\}) = \{2\}$, takže jedna barva nemůže stačit. Nyní ukážeme, že dvě barvy stačí.

Nejprve ukážeme, že f je prosté zobrazení. To ukážeme indukcí podle počtu prvků množiny M. Pro M jednoprvkovou je to jasné. Nyní nechť to platí pro n a předpokládejme $|M| = n+1$. Nechť m je největší prvek M a $\tilde{M} = M \setminus \{m\}$ a $\tilde{f}$ příslušná funkce pro $\tilde{M}$. Pak pokud $f(A) = f(B)$, pak $\tilde{f}(A \setminus \{m\}) = \tilde{f}(B \setminus \{m\})$, protože z maximálnosti m je $f(A) \setminus \{m\} = \tilde{f}(A \setminus \{m\})$ a podobně pro B. Tedy z indukčního předpokladu je

$A \setminus \{m\} = B \setminus \{m\}$. Takže A a B se mohou lišit jen v m. Ale kdyby se v něm lišily, tak by m bylo v právě jedné z množin $f(A)$ a $f(B)$, což je spor. Takže $A = B$ a f je prosté zobrazení.

Chceme ukázat, že graf vzniklý spojením všech A a $f(A)$ (pro $A \neq f(A)$) lze obravit dvěma barvami, tedy libovolný cyklus v tomto grafu má sudou délku. (To je standartní tvrzení z teorie grafů - když budou mít všechny cykly sudou délku, můžu obarvovat „postupně“ a díky sudousti cyklů a střídání barev nemůžu nikdy dostat spor.) Protože jsme ukázali, že f je prosté, stačí tedy ukázat, že pokud máme $A_1 \subset M$, $A_2 = f(A_1)$, $A_3 = f(A_2)$,..., $A_{n+1} = f(A_n)$, kde $A_{n+1} = A_1$, a platí $n > 1$, pak n je sudé.

Označme si $P = \cup_{i=1}^{n} A_i$ a $Q = \cap_{i=1}^{n} A_i$. Nechť a je nejmenší prvek $P \setminus Q$ (ten existuje protože $n > 1$). Protože $a \notin Q$, ale $a \in P$, existuje i takové, že $a \in A_i$ a $a \notin A_{i+1}$. To znamená, že v A_i existuje lichý počet dělitelů a různých od a. Ale ty musí z minimálnosti a všechny ležet v Q, takže a bude mít v každém A_i mít lichý počet dělitelů různých od a. Tedy pro každé i je $a \in A_i \iff a \notin A_{i+1}$. Protože ale $A_{n+1} = A_1$, musí být n sudé.