2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 29. 3. 2021.

Úloha 1. Pro čtyři přirozená čísla platí, že druhá mocnina součtu libovolné dvojice je dělitelná součinem zbylých dvou. Ukažte, že alespoň tři z nich se navzájem rovnají.

Úloha 2. M je matice 3×2 a N matice 2×3 a platí

$$MN = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že $NM = 9I$, kde I je jednotková matice.

Úloha 3. Po tabulce $(4n+2) \times (4n+2)$ chodí želva. Začíná v rohovém políčku a přechází vždy mezi dvěma políčky se společnou stranou. Projde tabulku tak, že do každého políčka vejde právě jednou a nakonec skončí v políčku, ze kterého vycházela. V závislosti na n určete největší k takové, že želva do nějakého řádku nebo sloupce vejde alespoň k-krát.

Úloha 4. Ukažte, že každá křivka délky 1 v rovině se vejde do nějakého uzavřeného obdélníku o obsahu $\frac{1}{4}$.

Úloha 5. Pro $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ řekneme, že $f \leq g$, jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda množina všech periodických funkcí na $\mathbb{R}$ (obecně s různými periodami) s uspořádáním $\leq$ tvoří svaz. Jaká bude odpověď pro množinu omezených periodických funkcí, resp. množinu spojitých periodických funkcí?

Úloha 6. Nechť p je prvočíslo. Pro každé $x \in \mathbb{Z}_p$ označme jako $|x|_p$ absolutní hodnotu reprezentanta x ležícího mezi $-\frac{p}{2}$ a $\frac{p}{2}$. Nechť $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ je taková funkce, že pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}_p$ je

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)|_p < 100.$$

Ukažte, že existuje $m \in \mathbb{Z}_p$, že pro každé $x \in \mathbb{Z}_p$ je

$$|f(x) - mx|_p < 1000.$$