

### 3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 19. 4. 2021.

**Úloha 1.** Konvexní mnohoúhelník je obsažený ve čtverci o straně 1. Ukažte, že součet čtverců délek stran mnohoúhelníka je nejvýše 4.

**Úloha 2.** Posloupnost  $a_1 + 2a_2$ ,  $a_2 + 2a_3$ ,  $a_3 + 2a_4$ , ... konverguje. Dokažte, že  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , ... také konverguje.

**Úloha 3.** Buď  $S$  neprázdný interval. Charakterizujte spojité funkce  $f : S \rightarrow S$  (najděte nutnou a postačující podmínku), které splňují, že pro každé  $x \in S$  existuje  $n \in \mathbb{N}$ , pro které  $f^n(x) = x$  (zde  $f^n$  značí  $n$ -krát aplikovanou funkci  $f$ ). Konkrétně určete, kolik takových funkcí pro danou množinu  $S$  existuje.

**Úloha 4.** Nechť  $S = \{2, 4, \dots, 2018, 2020\}$  je množina kladných sudých čísel menších než 2021 a  $T = \{3, 6, \dots, 2019\}$  množina kladných čísel dělitelných třemi menších než 2021. Určete

$$\sum_{A \subset S} \sum_{B \subset T} |A \cup B|.$$

**Úloha 5.** Nalezněte všechny funkce  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takové, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a každé prvočíslo  $p$  platí

$$p \mid f(n)f(p-1)! + n^{f(p)}.$$

**Úloha 6.** Do  $n$  krabic umístíme  $n$  kuliček tak, že  $i$ -tou kuličku umístíme náhodně do některé z prvních  $i$  krabic.  $P(n, k)$  pak označíme pravděpodobnost, že náhodně vybraná krabice obsahuje právě  $k$  kuliček. Najděte  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, k)$ .