3. soutěžní série

12. 4. 2021

Úloha 1. Nechť $f(n)$ je nejmenší číslo s touto vlastností: pokud libovolnou permutaci na n prvcích aplikujeme $f(n)$ krát, získáme identitu. Najděte vztah mezi $f(n)$ a $f(n-1)$. (5 bodů)

Úloha 2. Najděte nejmenší přirozené číslo n, pro něž existuje polynom nx^2+ax+b s celočíselnými koeficienty a dvěma různými kořeny v $(0,1)$. (10 bodů)

Úloha 3. A a B jsou matice 2×2 s celočíselnými členy. Matice A, $A+B$, $A+2B$, $A+3B$ a $A+4B$ jsou regulární a jejich inverze mají celočíselné členy. Ukažte, že i $A+5B$ je invertibilní a její inverze má celočíselné členy. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť $f : [0,1] \to (0,\infty)$ je spojitá funkce splňující

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Nechť a_k^n pro $n \in \mathbb{N}$ a $0 \leq k \leq n$ jsou taková reálná čísla, že $0 = a_0^n < a_1^n < \cdots < a_{n-1}^n < a_n^n = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $0 \leq k < n$ je

$$\int_{a_k^n}^{a_{k+1}^n} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}.$$

Nechť

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k^n.$$

Ukažte, že posloupnost b_n konverguje a určete její limitu. (15 bodů)

Vaše řešení nahrávejte do moodlu. Je možno nahrát i více souborů. Uvítáme, pokud jména souborů budou indikovat, které úlohy soubor obsahuje.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`