6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 31. 5. 2021.

Úloha 1. Která čísla z posloupnosti 101, 10101, 1010101, ...jsou prvočísla?

Úloha 2. Kolik násobení potřebujeme, počítáme-li determinant matice induktivně rozvojem podle sloupce? Výsledek vyjádřete jako uzavřenou formuli, tj. bez použití sumy (ale můžete použít celou část).

Úloha 3. Nechť $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ je spojitá funkce. Položme $t_n = n \sqrt[n]{n}$. Určete

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

Úloha 4. Ukažte, že pro daná přirozená n, r existuje r jednoznačně určených přirozených čísel $a_1 > a_2 > \cdots > a_r \geq 0$ takových, že

$$n = \binom{a_1}{r} + \binom{a_2}{r-1} + \cdots + \binom{a_r}{1}.$$

Úloha 5. Mějme body $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ ležící na sféře S v $\mathbb{R}^n$. Označme G těžiště bodů $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ a označme B_i průsečík polopřímky A_iG s S pro $i = 1, \ldots, n+1$. Dokažte

$$\sum_{i=1}^{n+1} |A_iG| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |B_iG|$$

Úloha 6. V konečném okruhu R platí následující vlastnost: pro libovolné prvky $a, b \in R$ existuje $c \in R$ takový, že $a^2 + b^2 = c^2$. Ukažte, že pro libovolné $a, b, c \in R$ existuje $d \in R$ takový, že $2abc = d^2$. (Výrazem $2abc$ myslíme $abc + abc$. Okruh R nemusí obsahovat jednotku a násobení nemusí být komutativní.)

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`