6. soutěžní série – řešení

1. Neexistuje. Nechť taková funkce f existuje. Pak pro každé $k \in \mathbb{Z}$ budou $f(k)$, $f(k+1)$ celá a z Lagrangeovy věty o střední hodnotě plyne, že existuje $\xi_k \in (k, k+1)$, ve kterém $f'(\xi_k) = f(k+1) - f(k) \in \mathbb{Z}$, spor.

2. Pro spor nechť ze tří různýh čísel a, b, c dostaneme po provedení operace stejný výsledek. Označme g největší společný dělitel všech 97 čísel různých od a, b, c. Můžeme předpokládat, že $a < b < c$. Potom z a se stane $a + \gcd(g, b, c)$ a z c se stane $c + (g, a, b)$. Protože (g, b, c) dělí b i c, dělí $c - b$ a tedy $1 \leq \gcd(g, b, c) \leq c - b$. Pak ale z předpokladu rovnosti $a + \gcd(g, b, c)$ a $c + \gcd(g, a, c)$ dostaneme $c < c + \gcd(g, a, b) = a + \gcd(g, b, c) \leq a + c - b$, tedy $b < a$, což je spor s volbou $a < b < c$.

(Povšimněme si, že ani nepotřebujeme, že $b+\gcd(g, a, c)$ také nabývá uvažované hodnoty, existenci b jsme využili jen proto, abychom ukázali, že mezi dvěma zvolenými původními čísli, která se změnila na stejné číslo, původně leželo ještě nějaké jiné.)

3. Označme $A_{i,j}$ matici získanou vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Ze singularity A plyne, že její sloupce jsou lineárně závislé a z $\det A_{1,1} = 2021$ plyne, že posledních $n - 1$ sloupců je lineárně nezávislých. Tedy pro sloupcové vektory platí $a_1 = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j a_j$, přičemž koeficienty λ_j jsou racionální, protože v matici A jsou pouze prvky tělesa $\mathbb{Q}$. Zvolme pevné i, označme a'_j vektor a_j bez prvního prvku a počítejme determinant $A_{1,i}$

$$\begin{aligned}\det A_{1,i} &= \det(\sum_{j=2}^{n} \lambda_j a'_j, a'_2, \ldots, a'_{i-1}, a'_{i+1}, \ldots, a'_n) = \lambda_i \det(a'_i, a'_2, \ldots, a'_{i-1}, a'_{i+1}, \ldots, a'_n) \\ &= (-1)^{i-2} \lambda_i \det(a'_2, \ldots, a'_n) = (-1)^{i-2} \lambda_i \det A_{1,1}.\end{aligned}$$

Díky symetrii A je i první řádek lineární kombinací zbylých řádků s koeficienty λ_j a zopakováním postupu výše získáme $\det A_{i,i} = (-1)^{i-2} \lambda_i \det A_{1,i} = (-1)^{2i-4} \lambda_i^2 \det A_{1,1} = 2021 \lambda_i^2$. Protože $\det A_{i,i} = 2021 \lambda_i^2$ je celým číslem, číslo $2021 = 43 \cdot 47$ neobsahuje čtverce a $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, jmenovatel λ_i musí být v základním tvaru 1 a $\det A_{i,i}$ je násobkem 2021.

4. Protože $b_{2n} = a_{2n} - \frac{a_n}{4}$, pišme

$$n\left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{3}{4}\right) = n\left(\frac{a_{2n}}{a_n} - 1\right) = \frac{n}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{a_n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+k/n)^2} \cdot \frac{1}{n}\right),$$

kde $a_n \to \frac{\pi^2}{6}$ a z teorie Riemannova integrálu konverguje poslední závorka k

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$