

## 6. soutěžní série

24. 5. 2021

**Úloha 1.** Existuje diferencovatelná funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že  $f(x)$  a  $f'(x)$  jsou celočíselná pro  $x \in \mathbb{Z}$  a neceločíselná pro  $x \notin \mathbb{Z}$ ?  
(5 bodů)

**Úloha 2.** Na tabuli je napsáno 100 různých přirozených čísel. Ke každému z nich přičteme největší společný dělitel zbylých 99. Mohou se nějaká tři z výsledných 100 čísel rovnat?  
(10 bodů)

**Úloha 3.** Nechť je celočíselná čtvercová matice  $A$  řádu  $n$ ,  $n \geq 2$  symetrická a singulární. Označme  $A_i$  matici získanou z  $A$  smazáním  $i$ -tého řádku a  $i$ -tého sloupce. Nechť  $\det A_1 = 2021$ . Ukažte, že 2021 dělí všechny  $\det A_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ .  
(10 bodů)

**Úloha 4.** Označme  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  a  $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$ . Ukažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{b_n}{a_n} - \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{\pi^2}.$$

(15 bodů)

Vaše řešení nahrávejte do moodlu. Je možno nahrát i více souborů. Uvítáme, pokud jména souborů budou indikovat, které úlohy soubor obsahuje.