2. soutěžní série – řešení

1. Mezi deseti po sobě jdoucími čísly je pět lichých, z nich jsou nejvýše dvě dělitelná trojkou, jedno pětkou a jedno sedmičkou. Celkově najdeme alespoň jedno číslo nesoudělné s prvočísly 2, 3, 5, 7. Pokud by toto číslo bylo soudělné s nějakým dalším z dané množiny, pak by společný dělitel nutně obsahující pouze prvočísla od jedenáctky výše dělil také rozdíl těchto dvou čísel, který je nejvýše 9, spor.

2. Odpověď zní $m+n-2$. Kdyby součet byl alespoň $m+n-1$. znamenalo by to, že buď všechny všechny řádky jsou modře dominované a všechny až možná na jeden sloupec jsou červeně dominované, nebo že všechny sloupce jsou červeně dominované a všechny až možná na jeden řádek jsou modře dominované. Tyto možnosti jsou symetrické, vysporujeme tedy první případ. Nechť všechny řádky jsou modře dominované. Tedy v každém z m řádků je alespoň $\frac{n+1}{2}$ modrých políček. Celkem je tedy v tabulce alespoň $m \cdot \frac{n+1}{2}$ modrých políček. Naopak každý červeně dominovaný sloupec obsahuje alespoň $\frac{m+1}{2}$ červených políček, tedy, protože červeně dominovaných sloupců je alespoň $n-1$, je v tabulce alespoň $(n-1) \cdot \frac{m+1}{2}$ červených políček. Ale pak těchto modrých a červených políček je dohromady alespoň

$$m \cdot \frac{n+1}{2} + (n-1) \cdot \frac{m+1}{2} = \frac{mn+m+mn-m+n-1}{2} = mn + \frac{n-1}{2} > mn,$$

což je spor, protože tabulka má jen mn políček.

Nyní zbývá jen konstrukce pro $m+n-2$. Pokud obdélníky o rozměrech $\frac{m-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ v levém horním a pravém dolním rohu obarvíme celé modře a obdélníky o rozměrech $\frac{m+1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ v levém dolním a pravém horním rohu obarvíme celé červeně (a zbývající prostřední políčko obarvíme libovolnou z barev), tak každý řádek krom prostředního bude modře dominován a každý sloupec krom prostředního bude červeně dominován, z čehož dostaneme $a = m-1$ a $b = n-1$, tedy $a+b = m+n-2$.

M	M	M	M	Č	Č	Č
M	M	M	M	Č	Č	Č
Č	Č	Č		Č	Č	Č
Č	Č	Č	M	M	M	M
Č	Č	Č	M	M	M	M

3. Nechť limita není nulová. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro nějakou rostoucí posloupnost (x_n) jdoucí k nekonečnu máme $\frac{f(x_n)}{x_n} > \varepsilon$, tedy $f(x_n) > \varepsilon x_n$. Dále si případným výběrem podposloupnosti z (x_n) jde navíc zařídit, aby $\frac{\varepsilon x_n}{2} > f(x_{n-1})$. Odtud plyne, že aspoň εx_n členů posloupnosti (a_i) je menších než x_n a zároveň nejvýše $\frac{\varepsilon x_n}{2}$ je menších než x_{n-1}, tedy aspoň $\frac{\varepsilon x_n}{2}$ členů je mezi x_{n-1} a x_n. Součet jejich převrácených hodnot je aspoň $\frac{1}{x_n}\frac{\varepsilon x_n}{2}$. Pak by součet konvergující řady byl zdola odhadnut $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} = \infty$, spor.

4. Posloupnost $t_n = \frac{1}{x-y}x^n - \frac{1}{x-y}y^n$ splňuje rekurentní vztah $t_{n+2} = bt_{n+1} + ct_n$, kde koeficienty b, c splňují $\lambda^2 - b\lambda - c = (\lambda - x)(\lambda - y)$. Navíc snadno dopočteme $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. Nyní stačí ukázat, že b, $c \in \mathbb{Z}$.

Nechť $t_n \in \mathbb{Z}$ pro $n \in \{m, m+1, m+2, m+3\}$. Protože b, c jsou řešení soustavy dvou rovnic $t_{m+2} = bt_{m+1} + ct_m$, $t_{m+3} = bt_{m+2} + ct_{m+1}$ s celočíselnými koeficienty, máme b, $c \in \mathbb{Q}$. Nahlédneme, že platí

$$t_{n+1}^2 - t_{n+2}t_n = x^n y^n = (-c)^n,$$

tj. $c^m \in \mathbb{Z}$, což dohromady s $c \in \mathbb{Q}$ dává $c \in \mathbb{Z}$. Z rekurentního vztahu indukcí plyne, že $t_n = P_n(b)$, kde P_n je monický polynom stupně $n-1$ s celočíselnými koeficienty: $P_1(b) = 1$, $P_2(b) = b$, $P_{n+2} = bP_{n+1}(b) + cP_n(b)$. Tedy b je kořenem monického polynomu $P_m(b) - t_m$ s celočíselnými koeficienty. Vzhledem k $b \in \mathbb{Q}$ máme opět $b \in \mathbb{Z}$.