2. soutěžní série

7. 3. 2022

Úloha 1. V množině deseti po sobě jdoucích přirozených čísel najdeme nějaké nesoudělné se zbylými. Dokažte. (5 bodů)

Úloha 2. Nechť $m, n > 1$ jsou lichá přirozená čísla. V tabulce $m \times n$ obarvíme políčka červenou a modrou barvou (každé políčko je obarveno přesně jednou z nich). O řádku nebo sloupci řekneme, že je nějakou barvou *dominován*, pokud je v něm nadpoloviční počet políček této barvy. Označme počet modře dominovaných řádků jako a a počet červeně dominovaných sloupců jako b. V závislosti na m a n určete, jaké největší hodnoty může nabývat $a + b$. (10 bodů)

Úloha 3. Uvažujme rostoucí posloupnost čísel (a_n) takovou, že součet jejich převrácených hodnot $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ konverguje. Nechť $f(x)$ značí počet indexů i, pro které $a_i < x$. Dokažte, že $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť x a y jsou taková komplexní čísla, že

$$\frac{x^n - y^n}{x - y}$$

je celé číslo pro čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla n. Ukažte, že pak je výraz celočíselný pro všechna přirozená n. (15 bodů)

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`