3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 28. 3. 2022.

Úloha 1. Mějme polynom $P(x) = x^2 + bx + c$ nad $\mathbb{Z}_p$, kde p je liché prvočíslo. Předpokládeje, že P je ireducibilní polynom (nad $\mathbb{Z}_p$). Pro kolik prvků $d \in \mathbb{Z}_p$ je $P(x) + d$ také ireducibilní?

Úloha 2. Uvažujme 2022 přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprochází společným bodem. Tyto přímky rozdělí rovinu na několik omezených a několik neomezených oblastí. Je možné, aby obsahy všech omezených oblastí byly celočíselné?

Úloha 3. Funkce f a g jsou definované na okolí nuly, spojité v nule a $g(0) \neq 0$. Pokud jsou fg a f/g diferencovatelné v nule, musí být i f diferencovatelná v nule?

Úloha 4. Nechť $m \neq 0$ je reálné číslo. Kořeny kvadratické rovnice

$$m^5x^2 - (m^7 + m^6 - m^4 - m)x + m^8 - m^5 - m^3 + 1 = 0$$

označme jako x_1 a x_2. Ukažte, že $x_1 = 1$ právě tehdy, když $x_2 = 1$.

Úloha 5. Nechť A je reálná matice 3×3 taková, že $A^3 = I$. Ukažte, že pokud pro nějaké reálné číslo α platí $(A - \alpha I)^3 = 0$, pak $A = I$.

$\star$ **Úloha 6.** Buď $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost přirozených čísel taková, že $n_k^{1/2^k}$ je rostoucí a neomezená. Dokažte, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ je iracionální.