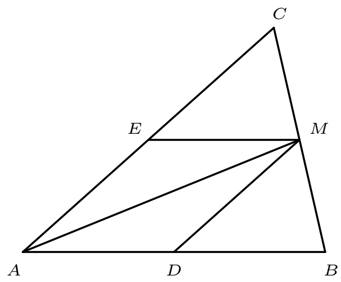
3. soutěžní série – řešení

1. Označme středy stran AB a CA postupně D a E. Pak je čtyřúhelník $ADME$ rovnoběžníkem s úhlopříčkou AM a trojúhelníky DBM a EMC jsou shodné. Proto stačí rozdělení na dva kusy střední příčkou DM. Jeden díl nestačí.



2. Položme $S_1 = \{1, 2, 3\}$ a pro $2 \leq i \leq 10$ položme $S_i = \{2^i, 2^i + 1, \ldots, 2^{i+1} - 1\}$. Každé z daných čísel bude v jedné z těchto množin. Protože máme 21 čísel a 10 množin, musí do nějaké množin spadnout aspoň tři čísla. Pokud je tato množina S_1, pak musíme 1, 2 i 3 jsou mezi uvažovanými čísly a můžeme zvolit $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$. Pokud naopak tři ze zvolených čísel spadnou do S_i pro $i > 1$, pak je označme a, b, c tak, že $b < a < c$. Protože $2^i \leq b < a < c < 2^{i+1} \leq 2b < 2a$, je $c < 2a$ a $a < 2b$. Vynásobením $c < 2a$ a $b < a$ dostaneme $bc < 2a^2$, vynásobením $a < c$ a $a < 2b$ dostaneme $a^2 < 2bc$.

3. Označme $g(x) = f'(x)\exp(-\lambda f(x))$. Pak $g'(x) = \exp(-\lambda f(x))(f''(x) - \lambda(f'(x))^2)$ a díky $\exp(-\lambda f(x)) > 0$ je $g'(x) = 0$ právě pro hledané řešení x. Funkce g je diferencovatelná, $g(a) = g(b)$ a dle Rolleovy věty existuje $x \in (a, b)$ splňující $g'(x) = 0$.

4. Nechť a_k, b_k, c_k, d_k jsou (nějaká) čísla taková, že $F_k(x) = \frac{a_k x + b_k}{c_k x + d_k}$ na definičním oboru F_k. Pak

$$F_{k+1}(x) = F_k\left(f(x)\right) = \frac{a_k \frac{ax+b}{cx+d} + b_k}{c_k \frac{ax+b}{cx+d} + d_k} = \frac{(a_k a + b_k c)x + (a_k b + b_k d)}{(c_k a + d_k c)x + (c_k b + d_k d)}.$$

Takže při maticovém zápisu platí $\begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tedy induktivně $\begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k$. Označme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Všimněme si, že $F_n(0) = 0$ je ekvivalentní s $b_n = 0$. Takže platí $\begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n$. Potom $\begin{pmatrix} aa_n & ba_n \\ ac_n + cd_n & bc_n + dd_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A^n \cdot A = A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_n + bc_n & bd_n \\ ca_n + dc_n & dd_n \end{pmatrix}$. Z toho plyne $aa_n = aa_n + bc_n$ a $ba_n = bd_n$. Z první rovnosti díky $b \neq 0$ plyne $c_n = 0$, zdruhé (opět díky nenulovosti b) plyne $a_n = d_n$. Tedy pokud $a_n \neq 0$, tak $F_n(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n} = \frac{a_n x + 0}{0x + a_n} = x$, což jsme chtěli. Zbývá tedy říct, že $a_n \neq 0$. Kdyby $a_n = 0$, pak A^n má horní řádek nulový, tedy A^n není regulární, tedy ani A není regulární. Pak ale (c, d) je jenom nenulový násobek (a, b), takže f je konstantní funkce, rovná konstantě $\frac{b}{d}$. Protože $0 = F_n(0) = f(F_{n-1}(0)) = \frac{b}{d}$, muselo by být $b = 0$, což je spor.