3. soutěžní série

21. 3. 2022

Úloha 1. V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC. Na kolik částí je potřeba rozřezat trojúhelník ABM, aby se z nich dal (bez překlápění) složit trojúhelník AMC? (5 bodů)

Úloha 2. Ukažte, že kdykoliv máme 21 různých kladných celých čísel menších než 2048, tak z nich umíme vybrat tři různá a ty označit a, b, c takovým způsobem, že

$$bc < 2a^2 < 4bc.$$

(10 bodů)

Úloha 3. Dvakrát diferencovatelná funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ splňuje $f(a) = f(b)$ a $f'(a) = f'(b)$. Ukažte, že pro každé reálné λ existuje řešení $f''(x) - \lambda(f'(x))^2 = 0$ uvnitř intervalu (a, b). (10 bodů)

Úloha 4. Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Označme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Nechť $F_n(x) = f(f(\dots f(x)\dots))$, kde se f objeví n-krát. (Např. $F_3(x) = f(f(f(x)))$.) Předpokládejme, že existuje kladné celé n takové, že funkce F_n je v nule definovaná, a že $F_n(0) = 0$. Ukažte, že pokud $b \neq 0$, pak platí $F_n(x) = x$ pro všechna x z definičního oboru F_n. (15 bodů)