1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 27. 2. 2023.

Úloha 1. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \neq 0$ je

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 - f(x) \geq x^2 f(x).$$

Úloha 2. V rovině leží 6 přímek (a žádné dvě nesplývají). Každý bod, kterým prochází alespoň tři z těchto přímek, obarvíme červeně. Kolik nejvíce může být červených bodů?

Úloha 3. Uvažujme grupu $G = \{(m, n);\, m, n \in \mathbb{Z}\}$ s operací $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Nechť H je nejmenší podgrupa obsahující prvky $(3, 8)$, $(4, -1)$ a $(5, 4)$. Označme $H_{k\ell}$ nejmenší podgrupu obsahující $(0, k)$ a $(1, \ell)$. Rozhodněte, zda $H = H_{k\ell}$ pro nějaká $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Úloha 4. Najděte konvexní neomezenou množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ obsahující bod $X \in A$ takový, že žádná polopřímka vycházející z X není celá obsažená v A. Dále ukažte, že A nesmí být otevřenou množinou.

Úloha 5. Vyřešte rovnici

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{x^2 + \cdots + \sqrt{x^n}}}} = 2.$$

Úloha 6. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené n a každé prvočíslo p platí

$$p \mid f(n) f(p-1)! + n^{f(p)}.$$