

1. soutěžní série

20. 2. 2023

Úloha 1. Vypočtete limitu posloupnosti

$$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}, \dots$$

(5 bodů)

Úloha 2. Jaký je nejmenší možný obsah konvexní množiny v rovině, která protíná obě ramena hyperboly $y = \frac{1}{x}$ a obě ramena hyperboly $y = \frac{-1}{x}$?

(10 bodů)

Úloha 3. Pokud je přirozené číslo n dělitelné 24, pak také součet dělitelů čísla $n - 1$ je dělitelný 24. Dokažte.

(10 bodů)

Úloha 4. Nechť posloupnost reálných čísel (a_n) splňuje $a_i + a_j \geq a_{i+j}$ pro všechny dvojice $i, j \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} \geq a_n.$$

(15 bodů)