2. soutěžní série – řešení

1. Protože každý žák poslal přesně tři pohledy, bylo celkem posláno 21 pohledů. Kdyby každý žák dostal pohledy od těch lidí, kterým pohled poslal, daly by se pohledy popárovat - pro každý pohled od žáka A žákovi B existuje pohled od žáka B žákovi A. Ale to by pak znamenalo, že celkový počet pohledů je sudý. Protože 21 je liché číslo, dostáváme spor.

2. Ukážeme, že minimální hodnost je 2 a maximální n. Vepíšeme-li čísla postupně po řádcích, pak je hodnost 2. Odečteme-li totiž od sebe dva sousední řádky dostaneme násobek vektroru $(1, 1, \dots, 1)$. Vepíšeme-li čísla tak, že na diagonále budou pouze lichá čísla, nad diagonálou pouze sudá čísla a pod diagonálou zbytek, bude v definici determinantu

$$\sum_{\pi} (-1)^{\operatorname{sgn} \pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)}$$

právě jeden lichý sčítanec (každá permutace kromě identické bude obsahovat prvek nad diagonálou). Tedy determinant bude lichý, tj. nenulový a hodnost matice bude n. Zbývá dokázat, hodnost nemůže být 1. Např. takto: Nechť prvek 1 je na pozici (i, j) a nechť největší prvek i-tého řádku, resp. j-tého sloupce leží ve sloupci k, resp. v řádku l. Každý z těchto prvků je aspoň n, jeden z nich je dokonce větší než n. Pak subdeterminant $a_{ij}a_{kl} - a_{kj}a_{il} < 1 \cdot n^2 - n \cdot n = 0$, tj. příslušné dva řádky jsou lineárně nezávislé.

3. Uvažujme nějaké pevné $x > 0$ a definujme rekurentní posloupnost jako $a_0 = x$ a $a_{n+1} = f(a_n)$. Protože f zobrazuje kladná čísla na kladná čísla, jsou všechny prvky posloupnosti kladné a dobře definované. Ze zadání nyní máme

$$a_{n+3} + 4a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0$$

pro každé n. Charakteristický polynom této posloupnosti pak je $\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$. Takže existují nějaká α, β, γ taková, že pro každé n je $a_n = \alpha + \beta \cdot (-2)^n + \gamma \cdot (-3)^n$. Ale z toho dostaneme, že kdyby β nebo γ byla nenulová, pak pro dost velká n bude a_n záporné, což je spor. Tedy $a_n = \alpha$, čili a_n je konstantní posloupnost a $f(x) = a_1 = a_0 = x$ pro každé x. Jednoduše ověříme, že funkce $f(x) = x$ funguje.

4. Započítejme nejprve, jakými exponenty přispějí násobky pětky, tj. 5^5, 10^{10}, 15^{15}, ... Odtud $5 + 10 + \dots + 5\lfloor \frac{n}{5} \rfloor = \frac{5}{2}\lfloor \frac{n}{5} \rfloor (\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1)$. K tomu připočtěme, co přidají navíc násobky 25: $25 + 50 + \dots + 25\lfloor \frac{n}{25} \rfloor = \frac{25}{2}\lfloor \frac{n}{25} \rfloor (\lfloor \frac{n}{25} \rfloor + 1)$. Tak postupujme dále až po násobky 5^k, kde k je největší přirozené číslo s $5^k \le n$. Ty přispějí $\frac{5^k}{2}\lfloor \frac{n}{5^k} \rfloor (\lfloor \frac{n}{5^k} \rfloor + 1)$. Označíme-li $\delta_i = \frac{n}{5^i} - \lfloor \frac{n}{5^k} \rfloor$, pak celkový součet lze vyjádřit jako

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} 5^i \left(\left(\frac{n}{5^i} - \delta_i \right)^2 + \frac{n}{5^i} - \delta_i \right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{n^2}{5^i} + n(1 - 2\delta_i) + 5^i(\delta_i^2 - \delta_i) \right)$$

a po vydělení n^2

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{5^i} + \frac{1}{2n}\sum (1 - 2\delta_i) + \frac{1}{2n^2}\sum 5^i(\delta_i^2 - \delta_i)$$

Ukážeme, že druhý a třetí sčítanec jdou k nule. Protože $k = \lfloor \log_5 n \rfloor$ a $|\delta_i| < 1$, $|\delta_i^2 - \delta_i| < 1$, máme

$$\left| \frac{1}{2n}\sum (1 - 2\delta_i) \right| < \frac{\log_5 n}{2n} \to 0, \quad \left| \frac{1}{2n^2}\sum 5^i(\delta_i^2 - \delta_i) \right| < \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{5^{1+\log_5 n} - 1}{5 - 1} = \frac{5n - 1}{8n^2} \to 0.$$

Limita je tedy rovna $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{5^i} = \frac{1}{8}$.