4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 17. 4. 2023.

Úloha 1. Buď $P(x) = ax^2 + bx + c$ a nechť rovnice $P(x) = x$ má dva různé reálné kořeny. Rovnice $P(P(x)) = x$ má kromě těchto dvou kořenů ještě dva další kořeny y a z. Najděte koeficienty kvadratického polynomu, který má kořeny y a z.

Úloha 2. V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a mimo rovinu bod P. Na přímkách AP, BP, CP, DP najděte po řadě body A', B', C', D' tak, aby $A'B'C'D'$ byl rovnoběžník.

Úloha 3. Dva hráči střídavě zapisují čísla 1, 2, …, 100 do matice 10×10. Hráč na tahu vybere dosud nepoužité číslo a volné místo v matici a číslo na toto místo zapíše. První hráč vyhrává, pokud je na konci matice regulární. Jinak vyhrává druhý hráč. Najděte vyhrávající strategii pro některého z hráčů.

Úloha 4. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost kladných čísel, jejíž součet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Označme S množinu všech součtů podposloupností

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k};\ n_k \text{ je rostoucí posloupnost přirozených čísel} \right\}.$$

Ukažte, že S je interval, právě když $a_{n-1} \leq \sum_{i=n}^{\infty} a_i$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 5. Dáno $n \geq 3$. Rovinu rozdělíme pomocí n přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jediném bodě. Kolik nejméně a kolik nejvíce ze vzniklých oblastí mohou být úhly (neomezená oblast ohraničená pouze dvěma polopřímkami)?

4th home series

Solutions will be presented at the seminar on April 17, 2023.

Problem 1. Let $P(x) = ax^2 + bx + c$ and let the equation $P(x) = x$ has two distinct real roots. The equation $P(P(x)) = x$ has, except these two roots, some other two roots y and z. Find coefficients of a quadratic polynomial with roots y and z.

Problem 2. Consider a convex quadrilateral $ABCD$ in a plane and a point P outside the plane. Find points A', B', C', D' lying on lines AP, BP, CP, DP respectively such that $A'B'C'D'$ is a parallelogram.

Problem 3. Two players write in turns numbers 1, 2, ..., 100 into a matrix 10×10. The player on a turn chooses an unused number and an empty position in the matrix and writes the number to the position. The first player wins if the final matrix is regular, oherwise the second player wins. Find a winning strategy for one of the two players.

Problem 4. Let $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a decreasing sequence of positive numbers such that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges. Denote S the set of the sums of all subsequences

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k};\ n_k \text{ is an increasing sequence of positive integers} \right\}.$$

Show that S is an interval if and only if $a_{n-1} \leq \sum_{i=n}^{\infty} a_i$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Problem 5. Given $n \geq 3$. The plane is divided into several areas by n lines, no two of them are parallel, no three of them intersect at a common point. Find the maximum and minimum number of areas that are 'angles' (unbounded area whose boundary consists of two half-lines).

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`