4. soutěžní série – řešení

1. Tři nenulové koeficienty má např. $x(x^2-1)(x^2-4)$. Ukážeme, že jeden nebo dva nenulové koeficienty nestačí. Jeden nenulový koeficient je jistě u x^5. Polynomy ax^5 a ax^5+b mají jen jeden kořen. Polynom $ax^5+bx=ax(x^4+b)$ má nejvýše tři reálné kořeny (z grafu funkce x^4+b). Polynomy ax^5+bx^k pro $k>1$ mají nulu jako dvojnásobný kořen, tj. nemohou mít 5 různých reálných kořenů.

2. Napišme si a_k ve tvaru $a_k=n^2+r$, kde r, $n\in\mathbb{N}$, $0\leq r\leq 2n$. 1. pokud $r=0$, jsme hotovi. 2. pokud $1\leq r\leq n$, pak $a_{k+1}=n^2+n+r<(n+1)^2$ a $a_{k+2}=n^2+2n+r=(n+1)^2+(r-1)$, tj. zbytek r se zmenšil o jedna. Po r takovýchto dvoukrocích tedy dostaneme $a_{k+2r}=(n+r)^2$. 3. Je-li zbytek $r>n$, pak $a_{k+1}=n^2+n+r=(n+1)^2+(r-n-1)$, tj. nový zbytek splňuje $0\leq r-n-1\leq n+1$, čímž jsme se dostali do situace 1. či 2.

3. Protože φ je lineární, je $\varphi(0)=\varphi(0+0)=\varphi(0)+\varphi(0)$, čili $\varphi(0)=0$. Nyní nechť f je libovolná spojitá funkce a $x_0\in\mathbb{R}$ splňuje $f(x_0)=0$. Definujme L jako spojitou funkci splývající s f na intervalu $(-\infty,x_0]$ a konstantně nulovou na $[x_0,\infty)$. Pak L splývá s nulovou funkcí na intervalu (x_0,∞), takže i $\varphi(L)$ tam splývá s $\varphi(0)=0$. Tedy $\varphi(L)$ je nulová na (x_0,∞), a díky spojitosti musí být i $\varphi(L)(x_0)=0$. Analogicky pokud si definujeme R jsko funkci splývající s f na $[x_0,\infty)$ a nulovou na $(-\infty,x_0]$, pak $\varphi(R)(x_0)=0$. Protože $L+R=f$, je z linearity $\varphi(f)=\varphi(L)+\varphi(R)$, takže $\varphi(f)(x_0)=\varphi(L)(x_0)+\varphi(R)(x_0)=0+0=0$. Čili pro každou $f\in C(\mathbb{R})$ je $\varphi(f)$ nulová ve všech bodech, ve kterých je f nulová (a možná i v dalších, o tom nic nevíme).

Nyní pro přehlednost označme konstantní jednotkovou funkci jako j a označme $h=\varphi(j)$. Nechť $f\in C(\mathbb{R})$ a $x\in\mathbb{R}$ jsou libovolné pevné. Pak $f-f(x)j$ je spojitá funkce nulová v x, takže $0=\varphi(f-f(x)j)(x)=\varphi(f)(x)-f(x)\varphi(j)(x)=\varphi(f)(x)-h(x)f(x)$. Tedy $\varphi(f)(x)=h(x)f(x)$, což jsme přesně chtěli.

4. Označme množinu všech fyziků A, množinu všech matematiků B, posílání vzkazu fyziky jako funkci $f:A\to B$, posílání vzkazu matematiky jako funkci $g:B\to A$. Pak hledáme množiny $F\subset A$ a $M\subset B$ splňující $F=A\setminus g(M)$ a $M=B\setminus f(F)$, neboli $F\subset A$ splňující $h(F):=A\setminus g(B\setminus f(F))=F$. Buď $C=\{F_i\subset A;\, h(F_i)\subset F_i\}$. Volme $F=\bigcap_{F_i\in C}F_i$, F je dobře definovaná ($A\in C$). Snadno vidíme, že z $F_1\subset F_2$ plyne $h(F_1)\subset h(F_2)$. Takže z $F\subset F_i$ postupně plyne $h(F)\subset h(F_i)\subset F_i$, $h(F)\subset\bigcap_{F_i\in C}F_i=F$, $h(h(F))\subset h(F)$, $h(F)\in C$, $F\subset h(F)$, $F=h(F)$.

Jiné řešení: Situaci si představíme jako orientovaný bipartitní graf s vrcholy V, kde každý vrchol má výstupní stupeň 1. Hledáme podmnožinu $S\subset V$ takovou, že žádná hrana z S nesměřuje do S a do každého vrcholu $V\setminus S$ směřuje nějaká hrana z S. Náš graf musí vypadat jako několik cyklů sudé délky a několik orientovaných stromů směřujících do cyklů. Množinu S sestrojíme následovně: Do S přidáme nějaký vrchol a bez předchůdce. Z grafu odstraníme a spolu s jeho sousedem (pokud zatím zůstal v grafu). Opakujeme. Nakonec mohou zůstat jen cykly sudé délky, ze kterých do S dáme každý druhý vrchol.

Jiné řešení: Úlohu zobecníme a předpokládejme, že každý poslal *nejvýše* jeden vzkaz. Pokud existuje nějaký protipříklad, vyberme takový s nejméně možnými matematiky. Pokud všichni matematici obdrželi vzkaz, volba $M=\emptyset$ a F všichni fyzici by vyhovovala. Nechť m neobdržel vzkaz. Představme si stav bez m, bez jeho adresáta f (pokud m poslal vzkaz) a bez případných vzkazů poslaných f. To bychom měli méně matematiků, tedy dle předpokladu existují vyhovující množiny M' a F'. Ale v našem původním protipříkladu by pak fungovalo $M=M'\cup\{m\}$ a $F=F'$. Spor, žádný protipříklad neeexistuje.