

4. soutěžní série

3. 4. 2023

Úloha 1. Jaký nejmenší počet nenulových koeficientů může mít polynom stupně 5, který má 5 různých celočíselných kořenů? (5 bodů)

Úloha 2. Definujme posloupnost přirozených čísel předpisem $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$. Ukažte, že pro každou volbu a_0 se v této posloupnosti objeví aspoň jedna druhá mocnina. (10 bodů)

Úloha 3. Buď $C(\mathbb{R})$ množina všech spojitých funkcí definovaných na $(-\infty, +\infty)$. Nechť $\varphi : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ je lineární zobrazení takové, že když $f = g$ na otevřeném intervalu (a, b) , pak $\varphi(f) = \varphi(g)$ na (a, b) . Ukažte, že $(\varphi(f))(x) = h(x)f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ pro nějakou funkci $h \in C(\mathbb{R})$. (10 bodů)

Úloha 4. Matematici a fyzici si posílali vzkazy. Každý matematik poslal vzkaz právě jednomu fyzikovi a každý fyzik poslal vzkaz právě jednomu matematikovi. Ukažte, že existuje skupina matematiků M a skupina fyziků F takové, že matematici z M poslali vzkazy všem fyzikům kromě F (tj. každý fyzik nepatřící do F dostal vzkaz od některého matematika z M a žádný fyzik z F takový vzkaz nedostal) a podobně fyzici z F poslali vzkazy všem matematikům kromě M . (15 bodů)