5. soutěžní série – řešení

1. Uvažujme konkrétní permutaci π. Tu lze rozdělit na několik cyklů o délkách $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Všimněme si, že π^ℓ je identita právě tehdy, když $a_1 \mid \ell, a_2 \mid \ell, \ldots a_k \mid \ell$. Tedy $f(n)$ je nejmenší ℓ takové, že toto platí pro všechny možné hodnoty $a_1, \ldots, a_k$. Protože tyto hodnoty mohou být jen mezi 1 a n, a všechny se nabývají, je dané ℓ vyhovující pro všechny π, právě když $1 \mid \ell, 2 \mid \ell, \ldots, n \mid \ell$, čili právě tehdy když $NSN(1, 2, \ldots, n) \mid \ell$, kde NSN značí nejmenší společný násobek. Z toho jednoduše plyne, že $f(n) = NSN(1, 2, \ldots, n)$. Stačí si uvědomit, že toto vyhovuje - pokud n není mocnina prvočísla, pak všechny jeho dělitele ve tvaru mocniny prvočísla už jsou obsaženy v $1, 2, \ldots, n-1$, tedy $f(n) = NSN(1, 2, \ldots, n) = NSN(n, NSN(1, 2, \ldots, n-1)) = NSN(1, 2, \ldots, n-1) = f(n-1)$. Pokud n je mocninou prvočísla p, pak tato mocnina tohoto prvočísla žádné z předchozích čísel $1, 2, \ldots, n-1$ nedělí, ale mocnina s exponentem o jedna nižším je tam obsažena. Tedy $f(n) = NSN(1, 2, \ldots, n) = NSN(n, NSN(1, 2, \ldots, n-1)) = pNSN(1, 2, \ldots, n-1) = pf(n-1)$.

2. Buď $\frac{p}{q} \in A$ racionální číslo v základním tvaru. Budeme sledovat hodnotu $|p| + |q|$ (začínáme s hodnotou $|p| + |q| \geq 3$). Pak $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} - \frac{q}{p} = \frac{p^2-q^2}{pq}$ je také v základním tvaru. $|pq| \geq \max(|p|, |q|)$, $|p^2 - q^2| \geq 2\max(|p|, |q|) - 1$, $(|p^2 - q^2| + |pq|) - (|p| + |q|) \geq 3\max(|p|, |q|) - 1 - |p| - |q| \geq \max(|p|, |q|) \geq 2$. Po n iteracích $f^{(n)}(A)$ mohou zbýt pouze čísla s hodnotou $|p| + |q| \geq 2n + 3$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(A) = \emptyset$.

3. Máme $c = (x_1 + y_j)(x_2 + y_j) \ldots (x_n + y_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Monický polynom $p(y) = (x_1 + y)(x_2 + y) \ldots (x_n + y) - c$ má kořeny $y_1, y_2, \ldots, y_n$, takže $p(y) = (y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_n)$. Zajímá nás hodnota $(x_i + y_1)(x_i + y_2) \ldots (x_i + y_n)$, což je $(-1)^n p(-x_i) = (-1)^n (x_1 - x_i)(x_2 - x_i) \ldots (x_n - x_i) - c = (-1)^{n+1} c$.

4. Uvažujme $g(x, y) = f(x, y) + 2(x^2 + y^2)$. To je na D spojitá funkce, tedy tam nabývá minima. Protože $g(0, 0) = f(0, 0) \leq 1$ a pro každé (x, y) na hranici D je $g(x, y) = f(x, y) + 2 \geq 1$, nabývá g minima v nějakém bodě (a, b) ve vnitřku D. Protože f má v celém vnitřku parciální derivace, má tam parciální derivace i g. Pak g musí mít v (a, b) parciální derivace nulové, čili $f_1(a, b) = -4a$, $f_2(a, b) = -4b$. Pak $f_1(a, b)^2 + f_2(a, b)^2 = 16(a^2 + b^2) < 16$