1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 4. 3. 2024

Úloha 1 (E)**.** Určete všechna přirozená čísla n taková, že množinu $A = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ lze napsat jako sjednocení dvou neprázdných disjunktních množin $A = B \cup C$, přičemž součin prvků množiny B je roven součinu prvků množiny C.

Úloha 2 (EM)**.** Řekneme, že kružnice k *půlí* kružnici l, pokud mají neprázdný průnik a jejich společná sečna je průměrem l. Nechť jsou dány kružnice k_1 a k_2 s různými středy. Najděte množinu středů všech kružnic k, které půlí zároveň k_1 a k_2.

Úloha 3 (EM-M)**.** Nalezněte součet největšího a nejmenšího řešení rovnice

$$9^{x+1} + 2187 = 3^{6x-x^2}.$$

Úloha 4 (M)**.** Nechť spojitá reálná funkce f pro všechny $c > 0$ splňuje $\lim_{n\to\infty} f(cn) = 0$. Plyne odtud $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

Úloha 5 (M-MH)**.** Existuje taková posloupnost $\{q_n\}_{n\geq 1}$ obsahující každé kladné racionální číslo právě jednou, že posloupnost $\{|q_{n+1} - q_n|\}_{n\geq 1}$ obsahuje také každé kladné racionální číslo právě jednou?

Úloha 6 (MH)**.** Buďte V a E po řadě množiny vrcholů a hran úplného grafu K_n na n vrcholech. Určete počet lineárních uspořádání množiny $V \cup E$, ve kterých se každá hrana objeví až po obou jejích koncových vrcholech.

1st home series

Solutions will be presented at the seminar on March 4, 2024.

Problem 1 (E)**.** Determine all positive integers n with the property that the set $A = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ can be written as the reunion of two disjoint and non empty sets, $A = B \cup C$, and the product of the elements in B is equal to the product of the elements in C.

Problem 2 (EM)**.** We say that a circle k *bisects* a circle l if they intersect and their common chord is a diameter of l. Given two circles k_1 and k_2 with distinct centers. Find the locus of centers of all circles k bisecting both k_1 and k_2.

Problem 3 (EM-M)**.** Find the sum of the largest and smallest solutions to the equation

$$9^{x+1} + 2187 = 3^{6x-x^2}.$$

Problem 4 (M)**.** Let a continuous real function f satisfies for each $c > 0$: $\lim_{n\to\infty} f(cn) = 0$. Can we conclude that $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

Problem 5 (M-MH)**.** Does there exist an enumeration $\{q_n\}_{n\geq 1}$ of the positive rationals such that $\{|q_{n+1} - q_n|\}_{n\geq 1}$ is another enumeration of the positive rationals?

Problem 6 (MH)**.** Let V be the vertex set and E the edge set of the complete graph K_n on n vertices. Determine the number of ways to linearly order $V \cup E$ such that each edge appears after both vertices comprising the edge.
