1. soutěžní série – řešení

1. Předpokládejme naopak, že pro nějaká $n > 5$ má $6^n + 1$ všechny číslice stejné. Protože 6^n vždy končí číslicí 6, musí pak desetinný zápis $6^n + 1$ sestávat jen z N číslic 7. Tedy $6^n + 1 = 7 \cdot \frac{10^N - 1}{9}$, čili $7 \cdot 10^N - 9 \cdot 6^n = 16$. Protože $n > 5$, je $N \geq 5$. Ale pak $2^5 \mid 7 \cdot 10^N - 9 \cdot 6^n = 16$, což je spor.

2. Pokud by existovaly 2 kružnice, z nichž ani jedna neleží uvnitř druhé, pak tyto 2 kružnice mají společnou tečnu, což nelze. Tedy kružnice jsou lineárně uspořádané inkluzí jimi ohraničených kruhů. Průnik těchto uzavřených (kompaktních) kruhů je neprázdná uzavřená množina (Cantorova věta). Pokud je průnik jednobodový, pak přímka procházející tímto bodem není tečná k žádnému z kruhů. Pokud je průnik vícebodový, pak infimum poloměrů není nula, průnik má neprázdný vnitřek a každá přímka protínající tento vnitřek není tečná k žádnému z kruhů.

3. Odpověď je $2n-2$. Konstrukce: Uvažujme polynom $p(x) = M(x^n+1)-(x+\cdots+x^{n-1})$, kde M je velké. Pak $p(x)^2 = M^2(x^{2n}+2x^n+1)-2M(x^n+1)(x^{n-1}+\cdots+x)+(x+\cdots+x^{n-1})^2$ má záporné koeficienty u $x^1, \ldots, x^{n-1}, x^{n+1}, \ldots, x^{2n-1}$.

Odhad: Buď $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$. Jistě $p(x)^2$ má nezáporné koeficienty u x^{2n} a x^0. Předpokládejme, že ostatní koeficienty $b_1, \ldots, b_{2n-1}$ jsou záporné. BÚNO $a_n > 0$. Dokážeme indukcí, že $a_{n-k} < 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$: Platí $0 > b_{2n-k} = a_n a_{n-k} + a_{n-1} a_{n-k+1} + \cdots + a_{n-k} a_n$. Z indukčního předpokladu jsou všechny sčítance kromě prvního a posledního kladné, tedy $a_n > 0$ implikuje $a_{n-k} < 0$. Pak ale $b_1 = 2a_0 a_1 > 0$, spor.

4. Ano, existuje. Snadno si všimneme, že pokud A obsahuje interval, pak je f na tomto intervalu konstantní. Zároveň můžeme bez újmy na obecnosti odebrat z A všechny až na jeden vzor pro každou hodnotu. Tedy potřebujeme zvolit množinu A obsahující nespočetně mnoho prvků, ale neobsahující žádný interval, a na ní definovat prostou funkci f s „nulovou derivací v hromadných bodech“. Volme $A \subset [0, 1]$ Cantorovo diskontinuum, tj. množinu čísel tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}$, kde $\alpha_k \in \{0, 2\}$. To je zároveň nespočetné a řídké. Funkci f definujme prostým předpisem $f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^{3k+1}}$. Nechť se $x, y \in A$ liší ve trojkovém zápisu poprvé na pozici n. Pak $|x - y| \geq \frac{2}{3^n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^n}$ a

$$0 < |f(x) - f(y)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{3^{3k+1}} = \frac{2}{3^{3n+1}} \frac{27}{26} = \frac{9}{13} \left(\frac{1}{3^n}\right)^3 < |x - y|^3.$$

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`