1. soutěžní série

26. 2. 2024

Úloha 1. Věděli jste, že $6^5 + 1 = 7777$? Ukažte, že pro $n > 5$ už desítkový zápis čísla $6^n + 1$ obsahuje aspoň dvě různé číslice.

(5 bodů)

Úloha 2. Existuje v rovině taková množina kružnic, že každá přímka v rovině je tečnou právě jedné kružnice z této množiny? (10 bodů)

Úloha 3. Buď n přirozené číslo, $n \geq 2$. Jaký největší počet záporných koeficientů může mít polynom $p(x)^2$, je-li $p(x)$ reálný polynom stupně n?

(10 bodů)

Úloha 4. Rozhodněte, zda existují množina $A \subset \mathbb{R}$ a funkce $f : A \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^3$$

a zároveň obor hodnot f je nespočetný. (15 bodů)

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

1st contest series

26. 2. 2024

Problem 1. Do you know that $6^5 + 1 = 7777$? Show that for $n > 5$ the decimal representation of the number $6^n + 1$ contains at least two different digits.

(5 points)

Problem 2. Is there a set of circles in the plane such that every line in the plane is tangent to exactly one circle from the set? (10 points)

Problem 3. Let n be an integer with $n \geq 2$. Over all real polynomials $p(x)$ of degree n, what is the largest possible number of negative coefficients of $p(x)^2$? (10 points)

Problem 4. Decide, whether there exist a set $A \subset \mathbb{R}$ and a function $f : A \to \mathbb{R}$ such that

$$\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^3$$

and the range of f is uncountable. (15 points)