2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 18. 3. 2024

Úloha 1. Dána konečná množina konečných posloupností číslic, množina *zakázaných posloupností*. Víme, že existuje nekonečná posloupnost číslic neobsahující žádnou zakázanou posloupnost. Existuje (nekonečná) periodická posloupnost neobsahující žádnou zakázanou posloupnost?

Úloha 2. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky se stranami celočíselných délek $a < b < c$ splňující $ab = 4(a + b + c)$.

Úloha 3. Nechť vektory $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ splňují $\|v_i - v_j\| \in \mathbb{Q}$ pro všechny $0 \le i < j \le n+1$, kde $\|\cdot\|$ je Euklidovská norma a $v_0 = 0$. Dokažte, že $v_1, \ldots, v_{n+1}$ jsou lineárně závislé nad racionálními čísly.

Úloha 4. Existuje taková množina kružnic v rovině, že každá přímka v rovině je tečnou právě dvou z těchto kružnic?

Úloha 5. Nechť pro kladnou nerostoucí funkci f na $[1, \infty)$ platí

$$\int_1^\infty x f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Dokažte, že konverguje také

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{|\sin x|^{1-\frac{1}{x}}}\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 6. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}$ následující dvě podmínky:

- Pokud $a + b + c \ge 0$, pak $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) \ge 3f(abc)$.
- Pokud $a + b + c \le 0$, pak $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) \le 3f(abc)$.

2nd home series

Solutions will be presented at the seminar on March 18, 2024.

Problem 1. Given a finite set of finite sequences of digits, the set of *forbidden sequences*. We know that there exists an infinite sequence that contains none of the forbidden sequences. Does there exist a periodic sequence that does not contain any of the forbidden sequences?

Problem 2. Find all right triangles with integer side lengths $a < b < c$ satisfying $ab = 4(a + b + c)$.

Problem 3. Let vectors $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ satisfy $\|v_i - v_j\| \in \mathbb{Q}$ for all $0 \leq i < j \leq n + 1$, where $\| \cdot \|$ is the Euclidean norm and $v_0 = 0$. Prove that $v_1, \ldots, v_{n+1}$ are linearly dependent over rational numbers.

Problem 4. Is there a set of circles in the plane such that every line in the plane is tangent to exactly two circles from the set?

Problem 5. Let a positive non-increasing function f on $[1, \infty)$ satisfy

$$\int_1^\infty x f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Prove that

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{|\sin x|^{1-\frac{1}{x}}}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Problem 6. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all real numbers a, b, and c the following two conditions hold:

- If $a + b + c \geq 0$ then $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) \geq 3f(abc)$.
- If $a + b + c \leq 0$ then $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) \leq 3f(abc)$.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`