3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 8. 4. 2024

Úloha 1. Nechť je dána spojitá funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a koeficienty $c_1, c_2 > 0$. Ukažte, že existuje $x \in (a, b)$ splňující

$$f(x) = \frac{c_1}{a - x} + \frac{c_2}{b - x}.$$

Úloha 2. Označme P množinu všech bodů v rovině a L množinu všech přímek v rovině. Ukažte, že neexistuje bijekce $f : P \to L$ taková, že obrazy každé trojice bodů ležící na jedné přímce jsou buď navzájem rovnoběžné a nebo mají jeden společný průnik.

Úloha 3. Buď x, y, z kladná reálná čísla. Dokažte, že

$$\sqrt{\frac{xy}{x^2 + y^2 + 2z^2}} + \sqrt{\frac{yz}{y^2 + z^2 + 2x^2}} + \sqrt{\frac{zx}{z^2 + x^2 + 2y^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Úloha 4. Buď $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matice splňující $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Ukažte, že $(AB - BA)^k = 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$.

Úloha 5. Nechť body $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ neleží v jedné nadrovině a nechť $B \in \mathbb{R}^n$ leží ve vnitřku konvexního obalu $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Ukažte, že $\angle A_iBA_j > 90°$ platí alespoň pro n dvojic $1 \leq i < j \leq n+1$.

Úloha 6. Buď $\tau(n)$ počet dělitelů n a $T(n)$ počet přirozených čísel $k \leq n$ takových, že $\tau(k)|k$. Dokažte $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n} = 0$.

3rd home series

Solutions will be presented at the seminar on April 8, 2024.

Problem 1. Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function and let $c_1, c_2 > 0$. Show that there exists $x \in (a, b)$ satisfying

$$f(x) = \frac{c_1}{a-x} + \frac{c_2}{b-x}.$$

Problem 2. Let P be the set of all points in plane and let L be the set of all lines in plane. Show that there is no bijection $f : P \to L$ such that images of any triplet of points are either parallel or concurrent.

Problem 3. Let x, y, and z be positive real numbers. Prove that

$$\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}} + \sqrt{\frac{yz}{y^2+z^2+2x^2}} + \sqrt{\frac{zx}{z^2+x^2+2y^2}} \le \frac{3}{2}.$$

Problem 4. Let $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ be matrices of order n satisfying $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Show that $(AB - BA)^k = 0$ holds for some $k \in \mathbb{N}$.

Problem 5. Let $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ be points not belonging to one hyperplane and let $B \in \mathbb{R}^n$ belong to the interior of the convex hull of $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$. Prove that $\angle A_iBA_j > 90^\circ$ holds for at least n pairs $1 \le i < j \le n+1$.

Problem 6. Let $\tau(n)$ be the number of divisors of n and let $T(n)$ denote the number of natural numbers $k \le n$ such that $\tau(k) | k$. Prove $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n} = 0$.