3. soutěžní série

15. 4. 2024

Úloha 1. Čísla $1, \dots, 3n+1$ seřadíme náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že součet prvních m čísel není dělitelný třemi pro žádné $m = 1, 2, \dots, 3n+1$? (10 bodů)

Úloha 2. Určete všechny dvakrát diferencovatelné funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $(f'(x))^2 + f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (10 bodů)

Úloha 3. Lze uzavřený jednotkový kruh rozdělit na dvě disjunktní shodné části? (10 bodů)

Úloha 4. Uvažujme konečnou grupu G řádu n generovanou dvouprvkovou množinou $\{g, h\}$. Rozhodněte, zda musí existovat posloupnost $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ obsahující každý prvek G právě dvakrát, kde $a_{k+1} \in \{ga_k, ha_k\}$. (10 bodů)

3rd contest series

April 15, 2024

Problem 1. We sort the numbers $1, \ldots, 3n+1$ randomly. What is the probability that the sum of the first m numbers is not divisible by three for any $m = 1, 2, \ldots, 3n+1$? (10 points)

Problem 2. Determine all twice differentiable functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $(f'(x))^2 + f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (10 points)

Problem 3. Is it possible to decompose a closed disk into a union of two disjoint congruent parts? (10 points)

Problem 4. Consider a finite group G of order n generated by the two-element set $\{g, h\}$. Decide whether there must exist a sequence $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ containing each element of G exactly twice, where $a_{k+1} \in \{ga_k, ha_k\}$. (10 points)

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`