6. soutěžní série

13. 5. 2024

Úloha 1. Buď n přirozené číslo a $\{a_1, \dots, a_n\}$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ dvě n-prvkové množiny reálných čísel, která splňují

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - t| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |b_i - t|$$

pro všechna reálná t. Dokažte

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

(5 bodů)

Úloha 2. Pro symetrickou reálnou 3×3 matici A s vlastními čísly a, b, c buď $f(A)$ matice, která má stejné vlastní vektory jako A, ale vlastní čísla $b + c$, $c + a$, $a + b$ (v tomto pořadí, tj. vlastní vektor matice A příslušný a je vlastním vektorem matice $f(A)$ příslušným $b + c$). Uvažujme posloupnost symetrických reálných 3×3 matic $A_0, A_1, A_2, \dots$, kde $A_{n+1} = f(A_n)$ pro $n \geq 0$, přičemž A_0 nemá žádné nulové členy. Jaký maximální počet matic v takové posloupnosti může mít aspoň jeden nulový člen? (10 bodů)

Úloha 3. Je dán polynom $p(x)$ s racionálními koeficienty splňující $p^{-1}(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Ukažte, že p je lineární. (10 bodů)

Úloha 4. Uvažujme posloupnost danou předpisem $x_{n+1} = x_n + x_n^{1/3}$, $x_1 = 1$. Najděte čísla $a, b \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{an^b} = 1.$$

(15 bodů)

6th contest series

May 13, 2024

Problem 1. Let n be a positive integer and let $\{a_1, \dots, a_n\}$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ be two sets of real numbers with n elements such that

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - t| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |b_i - t|$$

holds for every real t. Prove that

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

(5 points)

Problem 2. For a 3×3 symmetric real matrix A with eigenvalues a, b, c, let $f(A)$ be a 3×3 matrix with eigenvalues $b + c$, $c + a$, $a + b$ and the same eigenvectors as A (in the same order, i.e. the eigenvector of matrix A corresponding to a is an eigenvector of $f(A)$ corresponding to $b + c$). Le us consider a sequence of 3×3 symmetric real matrices $A_0, A_1, A_2, \dots$ such that $A_{n+1} = f(A_n)$ for $n \geq 0$ and A_0 has no zero entries. What is the maximal number of matrices with a null entry in such a sequence? (10 points)

Problem 3. Given a polynomial $p(x)$ with rational coefficients satisfying $p^{-1}(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Show that p is linear. (10 points)

Problem 4. Consider a sequence defined as $x_{n+1} = x_n + x_n^{1/3}$, $x_1 = 1$. Find numbers $a, b \in \mathbb{R}$ such that

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{an^b} = 1.$$

(15 points)

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`