2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 4. 11. 2013.

Úloha 1. Nechť p je liché prvočíslo a $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že p dělí

$$1^{p^n} + 2^{p^n} + \cdots + (p-1)^{p^n}.$$

Úloha 2. Nechť nenulová reálná čísla a, b, c splňují $a + b + c = 0$ a $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$. Pak $a^2 + b^2 + c^2 = 6/5$.

Úloha 3. Nechť spojitá funkce $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ splňuje $u(0) = u(1) = 0$ a pro všechna $x \in (0,1)$ platí $u''(x) + \mathrm{e}^x u'(x) = -1$. Ukažte, že $u'_+(0)$ existuje a je kladná.

Úloha 4. Ve čtyřiceti stejných balóncích je nějaký tlak. V jednom kroku můžeme vybrat nejvýše $k \in \mathbb{N}$ balónků a vyrovnat v nich tlak (na aritmetický průměr původních tlaků). Jaké je nejmenší k takové, že lze pro jakékoliv počáteční rozložení tlaků pomocí konečného počtu kroků vyrovnat tlak ve všech balóncích?

Úloha 5. Buď $P_1P_2P_3P_4P_5$ konvexní pětiúhelník, jeho úhlopříčky ho rozdělují na 10 trojúhelníků a jeden pětiúhelník. Pět z těchto trojúhelníků má stranu ležící na P_1P_3. Pokud těchto pět trojúhelníků má racionální obsahy, pak i zbývajících pět trojúhelníků a pětiúhelník mají racionální obsahy. Dokažte.

Úloha 6. Buď n přirozené číslo a $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ spojitá funkce splňující

$$\int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ukažte, že

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \geq n^2.$$

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`