3. soutěžní série

11. 11. 2013

Úloha 1. Na množině X uvažme (ne nutně asociativní) binární operaci $\odot$, která pro každé $a, b \in X$ splňuje $(a \odot b) \odot a = b$. Dokažte, že pro každé $a, b \in X$ také platí $a \odot (b \odot a) = b$.

Úloha 2. Označme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$$

Ukažte, že $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{4}$.

Úloha 3. *3D-kříž* je trojrozměrné těleso, které vznikne tak, že na každou stěnu jednotkové krychle „přilepíme" jednotkovou krychli (celkem tedy sestává ze sedmi jednotkových krychlí). Rozhodněte, zda je možné trojrozměrný prostor celý pokrýt 3D-kříži tak, aby jejich vnitřky byly disjunktní.

Úloha 4. Je-li $a > 1$ iracionální, pak $\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$ je také iracionální pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Dokažte.

---

výsledky na `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`