4. domácí série

úlohy budou předváděny na semináři 2. 12. 2013

Úloha 1. Mějme spojitou funci $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, která splňuje

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x) \cos x \,\mathrm{d}x = 0.$$

Pak f má aspoň dva nulové body v $[0, \pi]$. Dokažte.

Úloha 2. Buď R okruh a P jeho prvoideál. Dokažte, že R/P^2 nemá žádné idempotentní[1] prvky (kromě 0 a 1).

Úloha 3. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je definována rekurentně vztahy $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$. Pokud $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Z}$ splňují $\alpha_n x_{n+1} - \beta_n x_n = 1$, pak $\beta_n^2 + 8\alpha_n^2 + 4\alpha_n$ je druhou mocninou celého čísla. Dokažte.

Úloha 4. Dokažte pro $a \geq 2$, $x > 0$ nerovnost

$$a^x + a^{\frac{1}{x}} \leq a^{x+\frac{1}{x}}.$$

Kdy nastane rovnost?

Úloha 5. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice $n \times n$ s nezápornými členy a pro nějakou permutaci σ čísel $1, 2, \ldots, n$ platí $\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \geq 1$. Označme $a_{ij}(k)$ členy matice A^k. Pak množina

$$\{a_{ij}(k) : \ i, j, k \in \mathbb{N}, \ i, j \leq n\}$$

je omezená, právě když A^k je jednotková matice pro nějaké $k \in \mathbb{N}$.

Úloha 6. Najděte nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že čtverec $n \times n$ lze bez překrývání pokrýt čtverci 40×40 a 49×49, přičemž v pokrytí musí být zastoupeny oba druhy čtverců.

---

[1] Prvek e je idempotentní, pokud $e \cdot e = e$.