1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři v týdnu 13. – 17. 10. 2014.

Úloha 1. Dort má tvar trojúhelníka, jehož jeden vnitřní úhel je třikrát větší než jiný vnitřní úhel. Dokažte, že můžeme jedním rovným řezem rozříznout dort tak, že výsledné kusy půjdou zabalit (bez převracení) do krabice stejného tvaru a velikosti jako dort, avšak zrcadlově převrácené.

Úloha 2. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že rovnice $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ má (komplexní) kořen splňující $|z| = 1$, právě když $6 \mid n + 2$.

Úloha 3. Existuje polynom f stupně 2014 s celočíselnými koeficienty takový, že čísla $f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \ldots$ jsou po dvou nesoudělná pro všechna $n \in \mathbb{Z}$?

Úloha 4. (Seriál 1) Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ a $f''(t) \geq -f(t)$ pro všechna $t \in [0, \pi]$. Potom $f(t) \geq \sin t$ pro všechna $t \in [0, \pi]$. Dokažte.

Úloha 5. Letecké linky mezi n městy provozuje k společností. Každá dvě města spojuje přímá linka (bez mezipřistání) některé ze společností a všechny provozované linky jsou obousměrné. Ukažte, že pokud $n \geq 2^k + 1$, pak aspoň jedna společnost může nabídnout okružní cestu navštěvující lichý počet měst. Je to pravda i pro $n = 2^k$?

Úloha 6. Označme $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). O funkci $f\colon S^k \to S$ řekneme, že *konvenuje* binární relaci $\maltese$ (na S), pokud

$$f(a_1, \ldots, a_k) \maltese f(b_1, \ldots, b_k) \Rightarrow \exists i \leq k\colon a_i \maltese b_i.$$

Dokažte, že pokud f konvenuje relacím $=$ a $<$, pak konvenuje všem binárním relacím na S.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`