1. soutěžní série

6. 10. 2014.

Úloha 1. Všechna racionální čísla obarvíme dvěma barvami, stříbrnou a zlatou, tak, že pokud mají dvě čísla stejnou barvu, pak má tuto barvu i jejich aritmetický průměr. Dokažte, že pokud je nula zlatá a jednička stříbrná, pak jsou i všechna racionální čísla větší jak jedna stříbrná.

Úloha 2. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3 \geq 3\sqrt[3]{(a^2b+1)(b^2c+1)(c^2a+1)}.$$

Úloha 3. Navzájem různá přirozená čísla a, b, c splňují

$$a \mid b + c + bc, \quad b \mid c + a + ca, \quad c \mid a + b + ab.$$

Dokažte, že alespoň jedno z nich není prvočíslo.

Úloha 4. Do každého políčka tabulky $n \times n$ napíšeme kladné reálné číslo tak, že součet čísel v každém řádku je roven 1 a kdykoliv vybereme n políček tak, že z každého řádku i sloupce vezmeme právě jedno, je součin čísel v těchto políčkách menší nebo roven součinu čísel na diagonále. Dokažte, že součet čísel na diagonále je alespoň 1.

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`