2. domácí série

27. 10. 2014

Úloha 1. (Seriál 2) Pro $r, s \in \mathbb{N}$ dokažte

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Úloha 2. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q takové, že $p^{q+1} + q^{p+1}$ je druhou mocninou přirozeného čísla.

Úloha 3. Nechť C je komplexní $n \times n$ matice taková, že pro každou $n \times n$ matici X splňující $\operatorname{tr} X = 0$ je $\operatorname{tr}(CX) = 0$. Dokažte, že C je násobkem jednotkové matice.

Úloha 4. Posloupnost a_n je pro $n \geq 1$ definována předpisem

$$a_{n+2} = \sqrt{a_n + a_{n+1}},$$

hodnoty a_1, a_2 jsou zadaná kladná reálná čísla. Najděte všechny dvojice (a_1, a_2), pro které posloupnost a_n konverguje.

Úloha 5. Mějme n bodů v rovině. Pak počet dvojic bodů, jejichž vzdálenost je přesně jedna, je menší než $n\sqrt{n}$. Dokažte.

Úloha 6. Najděte všechna n přirozená, pro které lze polynom

$$g(x, y) = 1 + y^2 \sum_{k=1}^{n} x^{2k} + y^4 x^{2n+2}$$

rozložit na součin dvou polynomů dvou proměnných s komplexními koeficienty.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`