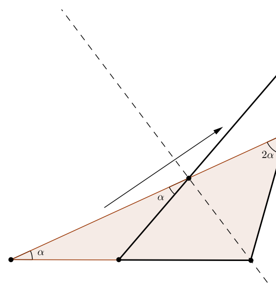
Úloha 1. Posloupnost $a_n = \sin n$ je protipříklad na jednu z implikací. Jistě $\lim \sin n$ neexistuje. Naproti tomu limity z aritmetických průměrů jsou rovny nule, protože posloupnost $(\sin(i+nj))_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty pro každé i, $j \in \mathbb{N}$ (napište si sinus jako reálnou část komplexní exponenciály a sečtěte část geometrické řady). Opačná implikace evidentně platí.

Úloha 2. Rozdělíme na deltoid a rovnoramenný trojúhelník (viz obrázek).



Úloha 3. Počítáme velikost orbity nakreslené tabulky, přičemž uvažujeme všechny řádkové a sloupcové permutace (tedy grupu $S_7 \times S_7$). Velikost orbity spočteme jako počet prvků hrupy dělený velikostí stabilizátoru. Velikost grupy je $7!^2$. Ukážeme, že stabilizátor tvoří pouze cyklické prohození řádků spolu se shodným cyklickým prohozením sloupců.To znamená, že velikost stabilizátoru je 7 a výsledek je roven $7! \cdot 6!$.

Uvažme prvek stabilizátoru (permutaci řádků a sloupců, co nemění tabulku). Ten některý řádek posílá na první řádek. V ten okamžik je jednoznačně daná permutace prvního řádku – tedy permutace sloupců. Tím je dána i podoba řádků a tedy i zbytek permutace řádků, aby tabulka zůstala nezměněná.

Úloha 4. Assume that f is such a function. Since $f'(x) > f(f(x)) > 0$, f is increasing, so that $f'(x) > f(f(x)) > f(f(0)) > 0$. This means that $f'(x)$ is bounded away from 0, and so $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Hence $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$, and so $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Set $g(x) := f(x) - x - 1$. Then $g'(x)$ also approaches $+\infty$, which implies that $g(x)$ approaches $+\infty$. Thus there exists some x_0 such that $f(x_0) > x_0 + 1$. Next, applying the mean value theorem to the interval $[x_0, f(x_0)]$, we obtain a point $\xi \in (x_0, f(x_0))$ for which

$$\begin{aligned} f(f(x_0)) &= f(x_0) + f'(\xi)(f(x_0) - x_0) > f'(\xi)(f(x_0) - x_0) > f(f(\xi))(f(x_0) - x_0) \\ &> f(f(x_0))(f(x_0) - x_0) > f(f(x_0)), \end{aligned}$$

which is a contradiction.