4. soutěžní série

1. 12. 2014

Úloha 1. Mějme vektory $v_1, v_2 \dots, v_{n+2} \in \mathbb{R}^n$. Ukažte, že existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+2} \in \mathbb{R}$ (ne všechna nulová) taková, že $\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i v_i = 0$ a zároveň $\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0$.

Úloha 2. (Seriál 2) Pro $s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ vyjádřete v uzavřeném tvaru

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{k} \binom{s}{k} k.$$

Úloha 3. Dokažte, že lze vybrat systém množin $S \subset P(\mathbb{N})$ mohutnosti kontinua takový, že každé dvě množiny z S mají pouze konečný průnik.

Úloha 4. Považujme za známý fakt, že každé $a \in (1, 2)$ lze zapsat právě jedním způsobem jako nekonečný součin

$$a = \left(1 + \frac{1}{n_1}\right) \left(1 + \frac{1}{n_2}\right) \left(1 + \frac{1}{n_3}\right) \dots,$$

kde n_i, $i = 1, 2, \dots$ jsou přirozená čísla splňující $n_i^2 \leq n_{i+1}$. Ukažte, že a je racionální číslo, právě když existuje takové m přirozené, že $n_{k+1} = n_k^2$ pro všechna $k \geq m$.