2. soutěžní série

26. 10. 2015

Úloha 1. Nechť A, B, $C \in \mathbb{R}^2$ jsou nekolineární body s celočíselnými souřadnicemi a také jejich vzájemné vzdálenosti jsou celočíselné. Jaká je minimální možná vzdálenost AB?

Úloha 2. Existuje funkce $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ taková, že $\varphi(x)\varphi(y) \leq |x-y|$ pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \neq y$ a pro každé $x \in \mathbb{Q}$ je množina

$$\{y \in \mathbb{Q} \mid \varphi(x)\varphi(y) = |x-y|\}$$

nekonečná?

Úloha 3. Ve hře TNT proti sobě hrají dva hráči, kteří do tabulky 1×2000 střídavě zapisují buď T, nebo N, vždy do jednoho doposud nevyplněného pole. Vyhrává ten, kdo jako první vytvoří tři bezprostředně po sobě jdoucí pole s písmeny TNT (v tomto pořadí). Dokažte, že hráč, který nezačíná, má vyhrávací strategii.

Úloha 4. Buď $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ spojitá, klesající a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Ukažte, že

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`