3. domácí série

16. 11. 2015

Úloha 1. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v každém bodě nezápornou druhou derivaci. Pak $f(x + f'(x)) \geq f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dokažte.

Úloha 2. Buď H průsečík výšek trojúhelníka ABC a M střed strany AC. Dále nechť D je průsečík polopřímky MH (M je počáteční bod) a kružnici opsané $\triangle ABC$. Dokažte, že úhel BDM je pravý.

Úloha 3. Nechť A je singulární matice $n \times n$ a A^* její adjungovaná matice (matice algebraických doplňků). Dokažte, že $1_n + A^*$ je regulární právě tehdy když $\operatorname{tr}(A^*) \neq -1$. Zde tr značí stopu matice a 1_n značí jednotkovou matici $n \times n$.

Úloha 4. Nechť G je graf na více než šesti vrcholech, ve kterém má každý vrchol stupeň tři. Dokažte, že vrcholy G lze rozdělit do dvou neprázdných podmnožin tak, aby vrcholy ve výsledných indukovaných podgrafech měly všechny stupeň alespoň dva.

⋆ **Úloha 5. (seriál)** Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme cyklotomický polynom

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\operatorname{lcm}\{x^d - 1 \ : \ d \mid n, d < n\}},$$

kde lcm značí nejmenší společný násobek polynomů. Uvažme dva cyklotomické polynomy Φ_a, Φ_b takové, že čísla $\Phi_a(x)$, $\Phi_b(x)$ jsou soudělná pro nějaké celé číslo x. Dokažte, že pak podíl a/b lze vyjádřit ve tvaru p^k, kde p je prvočíslo a k celé číslo.

⋆ **Úloha 6.** Označme $p(n)$ počet rozkladů přirozeného čísla n na součet přirozených čísel, $p(0) = 1$ a $p(-n) = 0$. Ukažte, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2k} (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2} - j\right) = 1.$$

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`