3. soutěžní série

23. 11. 2015

Úloha 1. Mějme nekonečnou spočetnou množinu kladných reálných čísel, která má kladný hromadný bod. Dokažte, že pak lze prvky množiny seřadit do posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Úloha 2. Pro přirozené číslo n označme $n\mathbb{Z}$ množinu všech celočíselných násobků n. Pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje bijekce $f\colon n\mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}$ taková, že $f(n) = -n$, $f(-n) = n$ a $f(ab) = f(a)f(b)$ pro všechna $a, b \in n\mathbb{Z}$?

Úloha 3. Dva hráči – ukazovač a pokládač – hrají hru na šachovnici 100×100. Ukazovač vždy ukáže na volné políčko a pokládač (je-li to možné) položí domino přes toto a některé sousedící volné políčko. Vyhrává ten, kdo nemůže táhnout. Kdo má vyhrávající strategii?

Úloha 4. Existuje polynom P s celočíselnými koeficienty takový, že $P(1+\sqrt{3}) = 2+\sqrt{3}$ a $P(3+\sqrt{5}) = 3+\sqrt{5}$?