# 4. soutěžní série – řešení

**1.** Stačí ukázat, že prvočíselné rozklady obou stran rovnosti obsahují každé prvočíslo $p \le n$ ve stejné mocnině. Buď tedy $p \le n$ prvočíslo. Je známé a zřejmé, že jeho mocnina v rozkladu $n!$ je

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots \tag{1}$$

Výraz $\mathrm{nsn}\{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{i} \rfloor\}$ je dělitelný $p$, právě když $\lfloor n/i \rfloor \ge p$. Ale

$$\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \ge p \;\Leftrightarrow\; \frac{n}{i} \ge p \;\Leftrightarrow\; \frac{n}{p} \ge i \;\Leftrightarrow\; \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \ge i.$$

Podobně je výraz $\mathrm{nsn}\{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{i} \rfloor\}$ dělitelný $p^k$, právě když $i \le \lfloor n/p^k \rfloor$. Tedy nejvyší mocnina $p$, která dělí součin

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{nsn}(1, 2, \dots, \lfloor n/i \rfloor)$$

je opět dána výrazem (1).

**2.** Buď $P_n(x) = F_n x^{n+1} + F_{n+1} x^n - 1$. Všimneme si,že $P_n(x) - P_{n-1}(x) = F_n x^{n-1}(x^2 + x - 1)$. Odtud $P_n(x) = (x^2 + x - 1)(F_1 + F_2 x + \dots + F_n x^{n-1})$. Tedy $P_n(x)$ je ireducibilní jen pro $n = 1$, kdy je kvadratický a nemá celočíselné kořeny.

**3.** Množina bodů nespojitosti je

$$M = \{c \in (a, b) : \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall m \in \mathbb{N} \; \exists y \in (c - 1/m, c + 1/m) \text{ takové, že } |f(y) - f(c)| \ge 1/n\},$$

což můžeme přepsat jako

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{c \in (a, b) : \; \forall m \in \mathbb{N} \; \exists y \in (c - 1/m, c + 1/m) \text{ takové, že } |f(y) - f(c)| \ge 1/n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Kdyby byla množina $M$ nespočetná, musela by některá z množin $M_n$ být nespočetná. Ze stejného důvodu by musela být nespočetná některá z množin $M_{n,k} := M_n \cap (a + 1/k, b - 1/k)$, $k = 1, 2, \dots$. Pak by ale obsahovala hromadný bod $z \in [a+1/k, b-1/k] \subset (a, b)$. Nechť $n, k$ jsou pevná a $z \in (a, b)$ je hromadný bod $M_{n,k}$. Ukážeme, že to vede ke sporu. Libovolně malé pravé nebo levé okolí bodu $z$ obsahuje bod $c \in M_{n,k}$ a k tomu zase najdeme libovolně blízko (tj. na stejné straně od $z$) bod $y$ takový, že $|f(c) - f(y)| \ge 1/n$. To je ale spor s tím, že příslušná jednostranná limita $\lim\limits_{x \to z+} f(x)$ nebo $\lim\limits_{x \to z-} f(x)$ existuje.

**4.** Rozklad existuje – buď $A$ množina všech nezáporných celých čísel, v jejichž dvojkovém zápisu je sudý počet jedniček, a $B$ totéž pro lichý počet.

Nechť $A_n$ je množina všech $(k, l) \in A^2$ takových, že $k + l = n$ a $k \ne l$, analogicky definujeme $B_n$; sestrojíme bijekci mezi těmito množinami pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Máme-li $(k, l) \in A_n$, pak v jejich zápisu v dvojkové soustavě nalezneme pozici nejvíc vpravo, na které se liší (taková existuje díky $k \ne l$), a prohozením číslice na této pozici dostaneme čísla $k'$, $l'$. Zřejmě dává tato operace složením se sebou samou identitu, jde tedy o bijekci, navíc také $(k, l) \in A_n \Leftrightarrow (k', l') \in B_n$, máme tedy $|A_n| = |B_n|$, což jsme chtěli.