5. domácí série

14. 12. 2015

Úloha 1. Spočtěte $n \times n$ determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & n & 0 \end{vmatrix}.$$

Úloha 2. Nechť $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce splňující

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Ukažte, že $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 4$.

Úloha 3. Existuje bijekce f na množině $\mathbb{R}^3$ taková, že pro každé dva různé body X, Y jsou směry přímek XY a $f(X)f(Y)$ kolmé?

Úloha 4. (seriál) Dokažte, že polynom $x^4 + 1$ je rozložitelný v $\mathbb{Z}_p$ pro každé prvočíslo p.

Úloha 5. Uvažujme posloupnosti $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^k$ a $g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Vypočtěte

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+2)}{g(n+1)} - \frac{g(n+1)}{g(n)}.$$

⋆ **Úloha 6.** Na přímce leží $n \in \mathbb{N}$ různých bodů rozmístěných tak, že mají-li nějaké dva body od sebe vzdálenost s, pak nejvýše jedna jiná dvojice bodů má od sebe vzálenost s. Dokažte, že existuje alespoň $\lfloor n/2 \rfloor$ různých čísel, které jsou vzdálenostmi pro právě jednu dvojici bodů.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`