5. soutěžní série

21. 12. 2015

Úloha 1. V každém z n vrcholů vánočního stromu visí jedna ozdoba. Ježíšek v nějakém pořadí postupně projde všech $n-1$ hran tohoto stromu a v každém kroku prohodí ozdoby v koncových vrcholech příslušné hrany. Dokažte, že výsledná permutace na ozdobách je tvořena právě jedním cyklem.

Úloha 2. Vánoční dárky mají tvar kvádru s celočíselnými délkami stran, ale ne krychle. Aby je Ježíšek donesl na 17. listopadu, naskládal je do přepravky tvaru krychle $10 \times 10 \times 10$ tak, že jimi tuto přepravku zcela vyplnil. Za předpokladu, že dárků je alespoň 100 dokažte, že se v přepravce nachází dva stejně velké a stejně orientované dárky.

Úloha 3. Ke dni 0 plave v jihočeském rybníku kapřík dlouhý 5cm. Ukažte, že za tisíc dní bude mít mezi 45cm a 45,1cm a bude tedy vhodný pro vánoční stůl. Délka kapra v centimetrech k n-tému dni (pro $n = 1, 2, \dots$) je dána rekurentním předpisem $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$.

Úloha 4. Ježíšek rozdělil $10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$ dárků mezi děti (aspoň dvě) tak, že každé dostalo stejný počet. Pro která n to mohl udělat tak, aby každé dítě dostalo aspoň dva dárky (aniž by dělal zázraky)?

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`