Definice

- Přes kořenové činitele: Nechť $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ a N_n je množina, přirozených čísel menších nebo rovných n nesoudělných s n. Pak
$$\Phi_n(x) = \Pi_{k\in N_n}(x-\omega_n^k).$$
- Přes nejmenší společný násobek: Nechť gcd značí největší společný násobek polynomů. Pak
$$\Phi_n(x) = \frac{x^n-1}{\mathrm{gcd}_{d<n,d|n}(x^d-1)}.$$
- Rekurentně:
$$\Phi_n(x) = \frac{x^n-1}{\Pi_{d<n,d|n}\Phi_d(x)}.$$

Vlastnosti

- $\Phi_n(x)$ je polynom stupně $\phi(n)$ (eulerova funkce) s celočíselnými koeficienty.
- $\Phi_n(x)$ je nerozložitelný v racionálních číslech, tedy v racionálních číslech se x^n-1 rozkládá na
$$x^n-1 = \Pi_{d|n}\Phi_d(x).$$
- Uvažme přirozené číslo n a dělitele $d \mid n$, $d<n$. Pokud je p společný prvočíselný dělitel $\Phi_n(x)$ a $\Phi_d(x)$ pro pevné x, tak $p \mid n$.
- Pokud jsou čísla $\Phi_a(x)$ a $\Phi_b(x)$ soudělná, tak a/b je tvaru p^k pro prvočíslo p a celé číslo k.
- Pro liché n je po vynásobení dvěma $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.
- Po pronásobení prvočíslem p lze spočítat
$$\Phi_{pn}(x) = \begin{cases} \Phi_n(x^p) & \text{pro } p \mid n, \\ \dfrac{\Phi_n(x^p)}{\Phi_n(x)} & \text{pro } p \nmid n. \end{cases}$$

Příklady

- $\Phi_1(x) = x-1$,
- $\Phi_2(x) = x+1$,
- $\Phi_{2^n}(x) = x^{2^{n-1}}+1$,
- pro prvočíslo p je $\Phi_p(x) = x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1$,
- pro prvočíslo $p>2$ je $\Phi_{2p}(x) = x^{p-1}-x^{p-2}+\cdots-x+1$,
- $\Phi_{12}(x) = \dfrac{x^{12}-1}{(x^6-1)\cdot\Phi_4(x)} = \dfrac{x^6+1}{x^2+1} = x^4-x^2+1.$
- $\Phi_n(0) = \begin{cases} -1 & \text{pro } n=1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$
- $\Phi_n(1) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n=1, \\ p & \text{pro } n=p^k, \text{ kde } p \text{ je prvočíslo}, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$