3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 14. 11. 2016.

Úloha 1. Amélie chce vyplnit čtvercovou tabulku 7×7 pomocí nepřekrývajících se trimin – má k dispozici dvě L-trimina (tj. kostky tvaru) a libovolné množství obdélníků 1×3. Ze zřejmých důvodů se jí to ale stále nedařilo, poprosila tedy Jonáše, aby jedno políčko z tabulky odstranil. Dokažte, že ať už Jonáš odstranil kterékoliv pole, s takto upravenou tabulkou již bude Amélie určitě úspěšná. Trimina je možné libovolně otáčet o násobky $90°$.

Úloha 2. (seriál) Buďte A, B disjunktní spočetné podmnožiny $\mathbb{R}$. Pak existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má ostrá lokální maxima právě v bodech množiny A a ostrá lokální minima právě v bodech množiny B. Dokažte.

Úloha 3. Buďte K kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^n$ a $f : K \to \mathbb{R}$ lokálně lipschitzovská funkce na K. Dokažte, že pak je f lipschitzovská na K. Připomeňme, že f je lokálně lipschitzovská, jestliže pro každý bod existuje okolí, na kterém je lipschitzovská.

Úloha 4. Nechť $\sigma(n)$, resp. $\tau(n)$ značí součet, resp. počet (kladných) dělitelů přirozeného čísla n. Nalezněte největší reálné číslo a takové, že nerovnost

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geq a\sqrt{n}$$

platí pro všechna $n > 1$.

⋆ **Úloha 5.** Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do kružnice k. Uvažujme bod Z uvnitř k a čtyřúhelník $EFGH$, jehož vrcholy tvoří průsečíky polopřímek AZ, BZ, CZ, DZ s kružnicí k. Zkonstruujte bod Z, pro který má čtyřúhelník $EFGH$ aspoň tři strany stejně dlouhé.

⋆ **Úloha 6.** Buď k přirozené číslo větší než 1 a uvažujme posloupnost splňující $a_0 > 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$ pro $n = 0, 1, \ldots$. Vypočtěte

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}.$$

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`