3. soutěžní série

7. 11. 2016

Úloha 1. (seriál) Řekneme, že funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je *rostoucí v bodě* $x \in (a,b)$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $f(y) < f(x) < f(z)$ pro všechna $y \in (x-\delta, x)$ a $z \in (x, x+\delta)$. Ukažte, že je-li f rostoucí v každém bodě intervalu (a,b), pak je rostoucí na (a,b). (5 bodů)

Úloha 2. V (konečném jednoduchém) grafu G má každý vrchol stupeň alespoň tři. Ukažte, že v G existuje cyklus, jehož délka není násobek tří. (10 bodů)

Úloha 3. Tři čtverce $ABCD$, $RATU$ a $WCYZ$ (body uvádíme proti směru hod. ručiček) mají po dvou nejvýše jednobodový průnik. Nechť M je střed úsečky TW. Dokažte, že kolmice na RY vedená bodem M prochází bodem B. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ jsou různá po dvou nesoudělná přirozená čísla taková, že kdykoliv budeme dělit číslo $\prod_{i \leq n, i \neq j} a_i$ číslem a_j, dostaneme tentýž zbytek po dělení r. Dokažte, že pak $r \leq n-2$. (20 bodů)