4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 28. 11. 2016.

Úloha 1. Mějme nenulové vektory $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ a lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ splňující $Lx_1 = x_1$ a $Lx_k = x_k - x_{k-1}$ pro $k = 2, \dots, n$. Dokažte, že $x_1, \dots, x_n$ jsou lineárně nezávislé.

Úloha 2. Dokažte, že (konečný jednoduchý) souvislý graf neobsahuje most právě tehdy, když lze jeho hrany zorientovat tak, že z každého vrcholu do každého se lze dostat po orientované cestě.

Úloha 3. Celá čísla a, b, c splňují

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3.$$

Ukažte, že abc je třetí mocninou celého čísla.

Úloha 4. Nechť G je (ne nutně konečná, aditivně zapsaná) komutativní grupa a p prvočíslo. Dokažte, že pG (neboli $\{pg \mid g \in G\}$) je průnikem všech podgrup $H \subseteq G$ indexu p.

⋆ **Úloha 5. (seriál)** Existuje omezená lebesgueovsky integrovatelná funkce $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, že $\int_0^1 |f - g| > 0$ pro každou riemannovsky integrovatelnou funkci g?

⋆ **Úloha 6.** Mějme čtverec v $\mathbb{R}^3$, jehož vrcholy mají celočíselné souřadnice. Pak délka strany čtverce je rovna $\sqrt{m^2 + n^2}$ pro nějaká celá čísla m, n.